

Royaume du Maroc



Ministère de l'Éducation Nationale,
du Préscolaire et des Sports

**Classes Préparatoires
aux Grandes Écoles**

**Programmes de la
deuxième année ECS**

REFLECTURE

Avant-propos

L'éducation est un pilier essentiel du développement national. Considérée comme la clé de l'innovation et du progrès, elle joue un rôle stratégique dans la préparation des nouvelles générations aux défis du monde moderne. Dans notre système éducatif, les Classes Préparatoires aux Grandes Écoles (CPGE) occupent une place centrale : en dispensant une formation exigeante et rigoureuse, elles préparent les étudiants à accéder aux grandes écoles d'ingénieurs et de management, tout en favorisant leur insertion et leur contribution active au développement du pays.

Les nouveaux programmes des CPGE que nous présentons aujourd'hui sont en accord total avec la Vision Stratégique 2015-2030 et la Loi-Cadre 51-17, qui placent l'éducation au cœur des priorités nationales. Conçue pour renforcer l'excellence académique, cette nouvelle version des programmes a pour finalité la maîtrise approfondie des disciplines de spécialité tout en préparant les étudiants à un monde en perpétuelle mutation. Ainsi, les contenus et les méthodes pédagogiques ont été adaptés en fonction des défis scientifiques et technologiques du monde actuel.

Grâce à cette refonte des programmes, les CPGE accentuent la pertinence et la solidité de la formation dispensée dans les disciplines fondamentales dont la maîtrise représente un atout considérable pour la réussite dans des parcours académiques et professionnels de haut niveau. En plus du développement des compétences scientifiques et techniques, cette formation vise également à développer des aptitudes transversales essentielles, telles que la pensée critique, la créativité et le traitement de problèmes complexes, afin de mieux armer les étudiants face aux enjeux contemporains.

Ces programmes accordent aussi une importance particulière aux aspects humains et culturels de la formation dans la mesure où ils mettent l'accent sur l'ouverture d'esprit, la communication et le plurilinguisme, autant d'éléments clés pour préparer les étudiants à évoluer dans un environnement mondialisé. Cette ouverture leur permet d'élargir leur vision du monde, en même temps qu'elle cultive chez eux des valeurs typiques des citoyens résolus aux défis à l'échelle locale, nationale et internationale.

Une autre caractéristique mise en avant par cette refonte est l'initiation à la recherche scientifique qui occupe une place privilégiée dans le nouveau dispositif. Cette composante a pour rôle d'inciter les étudiants à adopter une attitude dynamique envers le progrès scientifique, les encourageant à jouer un rôle actif dans l'évolution de leurs domaines d'étude et de recherche. Cette dimension revêt une importance particulière dans un monde où la capacité à concevoir des solutions novatrices et à résoudre des problématiques complexes est un avantage déterminant.

Ces programmes ne se limitent donc pas à un simple parcours académique, ils incarnent une ambition éducative audacieuse visant à faire des jeunes d'aujourd'hui les leaders de demain. Ils constituent un véritable tremplin pour l'avenir, préparant les étudiants à contribuer activement à l'émergence et à la compétitivité du Maroc sur la scène internationale. En misant sur une formation alliant excellence académique, innovation et valeurs humaines, nous œuvrons à construire un pays où le progrès et la créativité vont de pair avec l'inclusion sociale et le développement durable.

MOHAMED SAAD BERRADA

Ministre de l'Éducation Nationale,
du Préscolaire et des Sports

REFLECTURE

Table des matières

MATHÉMATIQUES	1
1 Preambule	1
1.1 Objectifs généraux de formation	1
1.2 Organisation du texte du programme	2
1.3 Contenu du programme	3
1.4 Organisation temporelle de la formation	4
1.5 Recommandations pédagogiques	4
Première période	5
1 Algèbre linéaire et bilinéaire	5
1.1 Compléments d'algèbre linéaire	5
1.2 Éléments propres des endomorphismes et des matrices carrées, réduction	6
1.3 Algèbre bilinéaire	7
2 Fonctions réelles définies sur \mathbb{R}^n	8
2.1 Introduction aux fonctions définies sur \mathbb{R}^n	8
2.2 Calcul différentiel	8
3 Compléments de probabilités; couples et n-uplets de variables aléatoires réelles	9
3.1 Compléments sur les variables aléatoires réelles	10
3.2 Introduction aux variables aléatoires à densité	11
3.3 Lois de variables aléatoires à densité usuelles	12
3.4 Variances des variables aléatoires à densité	12
3.5 n -uplets de variables aléatoires réelles; généralisation des propriétés de l'espérance et de la variance	13
Seconde période	15
1 Compléments d'algèbre bilinéaire	15
1.1 Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien, matrices symétriques	15
1.2 Projection orthogonale	15
1.3 Réduction des endomorphismes et des matrices symétriques	16
2 Fonctions réelles de n variables réelles définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n; recherche d'extrema	16
2.1 Fonctions réelles de n variables réelles définies sur une partie de \mathbb{R}^n	16
2.2 Compléments sur les fonctions de classe C^2 sur un ouvert de \mathbb{R}^n	16
2.3 Recherche d'extrema	17
3 Convergence d'une suite de variables aléatoires	19
3.1 Inégalité de MARKOV, inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV	19
3.2 Convergence en probabilité	19
3.3 Convergence en loi	19
4 Estimation	20
4.1 Estimation ponctuelle	21
4.2 Estimation par intervalle de confiance	21
4.3 Estimation par intervalle de confiance asymptotique	22
4.4 Comparaison d'estimateurs	22

Travaux pratiques de mathématiques avec Python	23
1 Préambule	23
1.1 Objectifs	23
1.2 Liste des savoir-faire et compétences exigibles	24
1.3 Commandes du langage Python	24
2 Liste des thèmes	24
2.1 Statistiques descriptives bivariées	24
2.2 Fonctions de plusieurs variables	25
2.3 Simulation de lois	25
2.4 Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance	25
INFORMATIQUE	27
1 Préambule	27
2 Contexte de la nouvelle réforme de l'informatique en C.P.G.E.	27
3 Objectifs généraux de la formation	28
4 Organisation et recommandations pédagogiques	28
4.1 Organisation temporelle de la formation	28
4.2 Recommandations pédagogiques	29
Première période	29
1 Bases de données	29
2 Intégration numérique	30
3 Équation et systèmes différentiels	30
4 Statistiques descriptives bivariées	31
Deuxième période	32
1 Simulation de variables aléatoires discrètes	32
2 Simulation de variables aléatoires continues	32
3 Estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance	33
4 Chaînes de Markov	33
5 Fonctions de plusieurs variables	34
HISTOIRE, GÉOGRAPHIE ET GÉOPOLITIQUE DU MONDE CONTEMPORAIN	35
Module IV Géodynamique l'UE et des Amériques	35
Objectif général du Module	35
Volume horaire du Module	35
Capacités ciblées	35
Contenus du Module	35
Recommandations et Précisions	37
Module V Géopolitique de l'Afrique, du PMO et de l'Asie	41
Objectif général du Module	41
Volume horaire du Module	41
Capacités ciblées	41
Contenus du Module	41
Recommandations et Précisions	43
CULTURE ARABE ET TRADUCTION	47

FRANÇAIS	49
1 Les objectifs de la formation	49
1.1 Objectif culturel	49
1.2 Objectif méthodologique	49
1.3 Objectif communicationnels	50
2 Composantes du programme	50
2.1 La culture générale	50
2.2 La méthodologie	50
2.3 La communication orale	51
ANGLAIS	53
1 Introductory Statement	53
2 Goals and aims	53
3 Specific Performance Objectives - Second Year Level	53
4 Assessment and Evaluation	54
5 Thematic contents – SECOND YEAR	54
5.1 Independent Project	55
6 Cognitive contents and skills SECOND YEAR	56
7 Linguistic skills_SECOND YEAR	56
7.1 Critical Reading Subskills	57
7.2 Listening/Visual interpretation subskills	57
7.3 Speaking Subskills	57
7.4 Writing	57
8 Translation	58
9 Table of Specification for CNC and CNAEM	59
9.1 The Hierarchy of Cognitive Skills: from Knowledge Recall to Creative Synthesis	59
9.2 Educational Goals: aligning Content, Objectives, and Cognitive Levels	59
ÉCONOMIE-DROIT	63
Programme de la deuxième année	63
Module 2.1 Financement et développement	63
Thème 2.1.1 Voies de financement de l'économie marocaine	63
Thème 2.1.2 Maroc : une économie en développement	63
Module 2.2 Obligations et contrats	64
Thème 2.2.1 Obligations	64
Thème 2.2.2 Contrats	64
Module 2.3 Régulation publique	64
Thème 2.3.1 Place et rôle de l'État dans l'économie	64
Thème 2.3.2 Politiques économiques de l'État	65
Thème 2.3.3 Politique de redistribution face aux risques sociaux et aux inégalités sociales ..	65
Module 2.4 Contrat de travail	65
Thème 2.4.1 Contrat de travail	66
SCIENCES DE MANAGEMENT ET GESTION	67
Programme de la deuxième année	68
Module 2.1 Analyse de la performance financière	68
Thème 2.1.1 Équilibre financier	68
Thème 2.1.2 Rentabilité	68

Module 2.2	Gestion des Ressources Humaines	68
<i>Thème 2.2.1</i>	Enjeux de la GRH	68
<i>Thème 2.2.2</i>	Outils GRH	69
Module 2.3	Analyse des coûts	69
<i>Thème 2.3.1</i>	Méthodes des coûts complets	69
Module 2.4	Analyse du marché	69
<i>Thème 2.4.1</i>	Analyse du marché de l'entreprise	69
<i>Thème 2.4.2</i>	Action marketing et gestion de la relation clients	70

Mathématiques

1 Préambule

1.1 Objectifs généraux de formation

Dans le monde de l'économie et de la gestion, le recours au formalisme, aux concepts et aux calculs mathématiques est permanent ; l'usage systématique des mathématiques dans la communication, l'information et comme outils d'aide à la prévision et à la décision est indispensable ; leur rôle dans les domaines de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché et des sciences sociales est important.

L'enseignement des probabilités et statistiques fournit un modèle mathématique prenant en compte l'aspect aléatoire d'un phénomène ; il permet de ce fait d'aborder des situations réelles où le hasard intervient. C'est ainsi que cette branche des mathématiques intervient dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, etc.) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

L'objectif principal du programme de mathématiques dans la filière Économique et Commerciale, option Scientifique, (ECS) est de fournir aux élèves les outils nécessaires à la compréhension des modèles mathématiques employés en sciences économiques et en gestion. Ces outils sont présentés sur des exemples illustrant leur intérêt.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des élèves et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par implication directe ou par équivalence, par contraposée, par l'absurde, par analyse-synthèse, par récurrence, etc.). La démonstration mathématique nécessitant des calculs laborieux ou présentant des difficultés techniques ou conceptuelles est laissée au profits d'exemples et d'illustrations graphiques ou numériques par simulation sur ordinateur. Il ne s'agit donc ni d'un recueil de recettes utiles ni d'un cours sur les fondements de mathématiques générales.

Pour réaliser ces objectifs, les élèves sont entraînés à faire des raisonnements déductifs simples utilisant un vocabulaire claire et précis, un formalisme mathématique correct et une rigueur dans la conduite des raisonnements. Certes les futurs lauréats de la voie scientifique ne feront pas des concepteurs d'outils liés aux calculs économiques et de gestion mais ils devront être capables d'apporter un regard critique sur les hypothèses sur les quels reposent ces outils, de comprendre les concepts qui entrent en jeu et de communiquer avec des mathématiciens professionnels dans le cadre de leur futur métier.

Si les mathématiques sont un outil puissant de modélisation, que l'élève doit maîtriser, elles sont parfois plus contraignantes lorsqu'il s'agit d'en extraire une solution. L'évolution des techniques permet désormais d'utiliser aussi l'approche numérique afin de faire porter prioritairement l'attention des élèves sur l'interprétation et la discussion des résultats plutôt que sur une technique d'obtention. Cette approche permet en outre une modélisation plus fine du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires ou l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles. C'est aussi l'occasion pour l'élève d'exploiter les compétences acquises en informatique. C'est enfin l'opportunité de mener avec les professeurs d'informatique, d'économie et de gestion d'éventuelles démarches collaboratives.

Dans leurs études futures, les élèves seront amenés à utiliser différents logiciels conçus pour la résolution de problématiques liées à certains contextes. Une pratique régulière d'outils informatiques les prépare utilement en ce sens. Par ailleurs, l'utilisation d'un outil informatique (programme informatique ou tableur) permet l'observation de résultats mathématiques en situation, l'exploration et la modélisation de situations non triviales plus réalistes et offre la possibilité d'expérimenter et de conjecturer.

Le langage Python comporte de nombreuses fonctionnalités permettant d'illustrer simplement certaines notions mathématiques. Ainsi, on utilisera dès que possible l'outil informatique en cours de mathématiques pour visualiser et illustrer les notions étudiées. Les parties du programme de mathématiques pouvant être traitées en liaison avec l'informatique sont clairement indiquées dans la colonne de droite.

Le programme vise aussi le développement des capacités d'expression et de communication des élèves ; cela suppose, à l'écrit, la capacité à comprendre les énoncés mathématiques, à mettre au point un raisonnement et à rédiger une démonstration et, à l'oral, celle de présenter de manière claire et synthétique une démarche ou une production mathématique. Les travaux individuels ou en équipe proposés aux élèves en dehors du temps d'enseignement (devoirs libres, interrogations orales, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales, etc.) contribuent de manière efficace à développer ces compétences. La communication utilise des moyens diversifiés auxquels il convient de familiariser les élèves : cela concerne non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément essentiel, mais aussi les dispositifs de projection appropriés (rétroprojecteur, vidéoprojecteur) et l'outil informatique.

1.2 Organisation du texte du programme

Le programme de la classe de deuxième année ECS est présenté en deux parties, chacune d'elles correspondant à une période. Chacune de ces parties définit un corpus de connaissances requises et de capacités attendues.

Le programme définit les objectifs de l'enseignement et décrit les connaissances et les capacités exigibles des élèves ; il précise aussi certains points de terminologie, certaines notations ainsi que des limites à respecter. À l'intérieur de chaque période, le programme est décliné en sections (numérotées 1, 2, ...). Chaque section comporte un bandeau et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme et à droite les commentaires et des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

- ◆ Le bandeau définit les objectifs essentiels, délimite le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives. Il décrit parfois sommairement les notions qui y sont étudiées ;
- ◆ les contenus fixent les connaissances exigibles des élèves, les résultats et les méthodes figurant au programme ;
- ◆ les commentaires donnent des informations sur les capacités attendues des élèves. Ils indiquent des repères et proposent des notations. Ils précisent le sens ou les limites de certaines notions ; les énoncés de certaines définitions ou de certains résultats sont parfois intégralement explicités, l'objectif étant ici d'unifier les pratiques des enseignants.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

La chronologie retenue dans la présentation des différentes sections de chaque période ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression. Cependant, la progression retenue par chaque professeur au cours de chaque période doit respecter les objectifs de l'enseignement dispensé au cours de cette période.

1.3 Contenu du programme

Le programme de mathématiques de deuxième année ECS se situe dans le prolongement de celui de première année ECS et permet d'en consolider les acquis. Son objectif est de fournir aux élèves le bagage nécessaire pour suivre les enseignements spécialisés de mathématiques, économie et gestion dispensés en Grande École ou en troisième année de Licence à l'université.

Il définit un socle de connaissances et de capacités, conçu pour être accessible à tous les élèves, en organisant de façon progressive leur introduction au cours de l'année. L'acquisition de ce socle par les élèves constitue un objectif prioritaire pour le professeur.

Le programme contribue à l'approfondissement de la culture scientifique générale en donnant aux élèves un accès à quelques domaines fondamentaux des mathématiques comme l'algèbre linéaire, dans son aspect matriciel, les probabilités qui préparent entre autre à la compréhension et la prise en compte de l'aléatoire, et enfin l'analyse où les élèves acquièrent de bonnes bases sur les notions de suite et de fonction. L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

L'orientation du programme vers les sciences de l'économie et de la gestion s'organise autour des quatre points forts suivants :

- ◆ en algèbre linéaire, on introduit la réduction des endomorphismes et des matrices carrées ainsi que les structures euclidiennes. Ces notions d'algèbre linéaire trouveront leurs applications lors de l'optimisation des fonctions de plusieurs variables, mais aussi en probabilités et en analyse de données (statistique descriptive bivariée) ;
- ◆ en analyse, on complète l'étude des intégrales généralisées débutée en première année de classe préparatoire et on introduit les fonctions de plusieurs variables définies sur \mathbb{R}^n ainsi que la notion de gradient. En deuxième période, on poursuit cette étude dans le but de résoudre des problèmes d'optimisation avec ou sans contraintes, cruciaux en économie et en finance ;
- ◆ en probabilité, l'étude des variables aléatoires discrètes, initiée en première année, se prolonge par l'étude des couples et des suites de variables aléatoires discrètes en première période ; en deuxième période, les notions sur les variables aléatoires à densité sont complétées. L'ensemble des notions sera présenté en lien avec la simulation informatique des phénomènes aléatoires. Un des objectifs est de permettre, en fin de formation, une approche plus rigoureuse et une compréhension plus aboutie des méthodes de l'estimation ponctuelle ou par intervalles de confiance ;
- ◆ l'informatique est enseignée tout au long de l'année en lien direct avec le programme de mathématiques. Cette pratique régulière permettra aux élèves de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple de la simulation de lois de probabilité, de la recherche d'extrema en analyse ou de différentes techniques d'estimation.

Les travaux pratiques de mathématiques avec Python sont organisés autour de quatre thèmes faisant intervenir divers points de ce programme. Leur objectif est de permettre aux élèves d'approfondir leur compréhension des mathématiques en utilisant Python de manière judicieuse et autonome, ainsi que d'illustrer ou de modéliser des situations concrètes en mobilisant leurs connaissances mathématiques. Les savoir-faire et compétences que les élèves doivent acquérir lors de ces séances de travaux pratiques sont spécifiés dans la liste des exigibles et rappelés en préambule de chaque thème. Les nouvelles notions mathématiques introduites dans certains thèmes ne font pas partie des exigibles du programme.

Au fur et à mesure de la progression des cours, on tâchera de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme.

1.4 Organisation temporelle de la formation

Le programme de la classe de deuxième année ECS est présenté en deux parties de volume sensiblement équivalent, chacune d'elles correspondant à une période. Le programme de la première période est étudié complètement en premier lieu, lors des quatre premiers mois de l'année ; celui de la deuxième période est ensuite abordé.

Ce découpage en deux périodes d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque période, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit, en toute liberté, l'organisation de son enseignement en veillant à alterner, de préférence, des chapitres d'analyse, de probabilité et d'algèbre linéaire.

La partie relative aux travaux pratiques de mathématiques avec Python doit être traitée progressivement au fur et à mesure de l'avancement du programme. Le logiciel Python comporte de nombreuses fonctionnalités permettant d'illustrer simplement certaines notions mathématiques. Ainsi, on utilisera dès que possible l'outil informatique en cours de mathématiques pour visualiser et illustrer les notions étudiées.

1.5 Recommandations pédagogiques

Ce programme propose des activités dont les unes mettent en oeuvre des techniques classiques et bien délimitées qui doivent être maîtrisées par les élèves, les autres visent à développer un savoir-faire ou à illustrer une idée, et avec lesquelles les élèves doivent acquérir une certaine familiarité. Les séances de travaux dirigés sont le moment privilégié de la prise en main puis de la mise en oeuvre de ces techniques classiques dont la maîtrise s'acquiert notamment grâce à des exercices et à des problèmes que les élèves doivent in fine être capables de résoudre par eux-mêmes.

Les développements formels ou trop abstraits doivent être évités ; une place importante doit être faite aux applications, exercices, problèmes, en relation chaque fois que cela est possible avec les enseignements d'économie, de gestion et d'informatique, tout en évitant les situations artificielles ainsi que les exercices de pure virtuosité technique.

Les interactions entre les différentes parties du programme sont fortes et mériteront d'être soulignées, de même que les liens avec d'autres disciplines, permettant ainsi de mettre en évidence la spécificité et la valeur de la démarche mathématique.

Le programme est présenté en deux grandes parties, mais son organisation n'est pas un plan de cours ; il va de soi que cette présentation n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre les différents domaines des mathématiques.

Les sections qui composent le programme suivent un ordre thématique qui n'est d'ailleurs pas le seul possible. Cette organisation a pour objet de présenter les différentes notions du programme de mathématiques et ne peut en aucun cas être considéré comme une progression de cours.

Chaque professeur adopte librement la progression qu'il juge adaptée au niveau de sa classe et conduit l'organisation de son enseignement dans le respect de la cohérence de la formation globale et en privilégiant la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Il choisit ses méthodes et ses problématiques en privilégiant la mise en activité¹ des élèves et en évitant tout dogmatisme, et ce quel que soit le temps d'enseignement proposé (cours, travaux dirigés, travaux pratiques de mathématiques avec Python). En effet, l'acquisition des connaissances et le développement des capacités et des compétences sont d'autant plus efficaces que les élèves sont acteurs de leur formation. Le contexte d'enseignement retenu et les supports pédagogiques utilisés doivent motiver les élèves et favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie de ces derniers. Les situations de résolution de problèmes, de la modélisation jusqu'à la présentation des résultats en passant par la démarche de résolution proprement dite, favorisent cette mise en activité.

1. "Tell me and I forget, teach me and I may remember, involve me and I learn." BENJAMIN FRANKLIN (« Dis-moi et j'oublie, enseignes-moi et je peux me rappeler, implique-moi et j'apprends. »)

En contrepartie de cette liberté dans l'organisation de la progression, le respect des **objectifs de formation et son étalement dans l'année**, comme indiqués ci-dessus, reste une nécessité incontournable.

Première période

1 Algèbre linéaire et bilinéaire

Le programme se place dans le cadre des espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{R} .

1.1 Compléments d'algèbre linéaire

Somme directe de sous-espaces vectoriels

Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Caractérisation par la dimension des sommes directes d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels : si F_1, \dots, F_p sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie, alors

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i),$$

avec égalité si, et seulement si, la somme est directe.

Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.

Caractérisation d'une somme directe par le fait qu'une concaténation de bases soit une base de la somme.

Base adaptée à une décomposition en somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Changement de base, matrices semblables, trace

Matrice d'un endomorphisme f dans la base \mathcal{B} .

Rappels ; notation $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Matrice de passage de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{C} ; $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est inversible et on a la relation $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.

Notation $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

Formules de changement de base.

$$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} X_{\mathcal{C}} ; \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}.$$

Matrices semblables : deux matrices carrées M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites semblables s'il existe P inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PNP^{-1}$.

Les matrices M et N sont semblables si, et seulement si, elles représentent les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases.

Trace d'une matrice carrée. Linéarité de la trace ; si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Notation $\text{tr}(M)$.

Invariance de la trace par changement de base : deux matrices semblables ont même trace.

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(P^{-1}AP).$$

Aucune autre propriété de la trace n'est exigible ; cette notion est introduite uniquement comme outil simple et efficace pour la recherche de valeurs propres.

1.2 Éléments propres des endomorphismes et des matrices carrées, réduction

Dans toute cette section, f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur \mathbb{R} ; M est une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$ à coefficients réels.

Éléments propres des endomorphismes et des matrices carrées

Vecteurs propres et espaces propres

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Spectre de $f \in \mathcal{L}(E)$, de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si Q est un polynôme, obtention d'éléments propres de $Q(f)$ à partir d'éléments propres de f .

Valeurs propres des matrices triangulaires.

Notations $\text{Sp}(f)$, $\text{Sp}(M)$.

Si $f(x) = \lambda.x$, $x \in E$, alors $Q(f)(x) = Q(\lambda).x$; si $MX = \lambda.X$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $Q(M)X = Q(\lambda).X$.

Recherche d'éléments propres

Polynômes annulateurs d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Si Q est un polynôme annulateur de f (respectivement M) et λ une valeur propre de f (respectivement M), alors $Q(\lambda) = 0$.

Tout endomorphisme d'un espace de dimension finie (toute matrice carrée) admet au moins un polynôme annulateur non nul.

Exemples des homothéties, des projecteurs et des symétries vectorielles.

Aucune autre connaissance sur les polynômes annulateurs ne figure au programme.

Propriétés générales

En dimension finie, tout endomorphisme admet un nombre fini de valeurs propres et ses sous-espaces propres sont en somme directe.

Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes forme une famille libre de E .

En particulier,

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim \text{Ker}(f - \lambda.id_E) \leq \dim E.$$

En particulier, une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forme une famille libre de E .

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admet au plus n valeurs propres.

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

L'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base \mathcal{B} de E formée de vecteurs propres de f .

Caractérisation des endomorphismes diagonalisables à l'aide des dimensions des sous-espaces propres.

L'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, E est somme directe des sous-espaces propres de f .

Diagonalisabilité d'une matrice carrée.

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est alors une matrice diagonale.

f est diagonalisable si, et seulement si,

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim \text{Ker}(f - \lambda.id_E) = \dim E$$

En dimension n , un endomorphisme ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

M est diagonalisable si, et seulement si, elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}MP$ soit une matrice diagonale. Les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M .

Caractérisation des matrices diagonalisables.

Interprétation matricielle des résultats précédents

relatifs à la diagonalisabilité des endomorphismes.

Application au calcul des puissances d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

1.3 Algèbre bilinéaire

L'objectif de cette section est d'introduire les notions fondamentales de l'algèbre bilinéaire dans le cadre euclidien, i.e. pour un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'un produit scalaire. Ces notions seront utilisées en particulier lors de l'étude des fonctions de plusieurs variables. Les endomorphismes symétriques seront traités en deuxième période.

Les espaces vectoriels considérés ici sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels ; on identifiera \mathbb{R} et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

Produit scalaire

Produit scalaire sur un espace vectoriel réel, norme euclidienne associée.

Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique, définie positive.

Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n ; autres exemples de produits scalaires.

Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.

Cas d'égalité.

Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux.

Familles orthogonales, familles orthonormales ou orthonormées.

On ne considérera que des familles finies.

Toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.

Théorème de PYTHAGORE.

Espaces euclidiens

Dans ce paragraphe x, y désignent des vecteurs d'un espace vectoriel et X, Y sont les colonnes coordonnées correspondantes dans une base.

Espace euclidien.

Un espace euclidien est un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} , muni d'un produit scalaire.

Existence de bases orthonormées.

On pourra introduire la méthode de l'orthonormalisation de SCHMIDT sur des exemples en petite dimension, mais cette méthode n'est pas exigible.

Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormées. Expression de la norme et du produit scalaire en bases orthonormées.

$$x = \sum_i \langle e_i, x \rangle e_i \quad \|x\|^2 = \sum_i \langle e_i, x \rangle^2 = X^T X$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_i \langle e_i, x \rangle \langle e_i, y \rangle = X^T Y$$

Changement de bases orthonormées.

La matrice de passage P , d'une base orthonormée à une base orthonormée, est orthogonale : $P^{-1} = P^T$. Aucune autre connaissance sur les matrices orthogonales n'est au programme.

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel.

Notation F^\perp .

Complétion d'une famille orthonormée en base orthonormée.

2 Fonctions réelles définies sur \mathbb{R}^n

2.1 Introduction aux fonctions définies sur \mathbb{R}^n

Il s'agit de confronter les élèves à la notion de fonction réelle de n variables réelles et de leur présenter les principales définitions et propriétés tout en évitant les problèmes de nature topologique. C'est pourquoi le domaine de définition des fonctions sera systématiquement \mathbb{R}^n , muni de sa structure euclidienne canonique. L'étude de la continuité d'une fonction en un point pathologique est hors programme, de même que l'étude des recollements de formules lorsque f est définie sur \mathbb{R}^n par plusieurs formules.

Dès que possible, les notions introduites seront illustrées à l'aide de la librairie `matplotlib.pyplot` de Python.

Fonctions définies sur \mathbb{R}^n , à valeurs dans \mathbb{R} .

On donnera de nombreux exemples de fonctions de 2, 3 ou n variables réelles.

Les fonctions polynomiales de n variables réelles donnent des exemples simples de fonctions définies sur \mathbb{R}^n .

Équation du graphe d'une fonction définie sur \mathbb{R}^n .

Cas des fonctions affines de n variables.

Lignes de niveau pour les fonctions de deux variables.

On se limitera à des exemples simples.

Continuité en un point d'une fonction de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R} .

Une fonction f , définie sur \mathbb{R}^n , est continue au point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ \|x - x_0\| \leq \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Aucune difficulté ne sera soulevée sur ce sujet.

On mettra en avant l'analogie avec la notion de continuité des fonctions d'une variable réelle vue en première année.

Continuité d'une fonction de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R} .

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur \mathbb{R}^n si elle est continue en tout point de \mathbb{R}^n .

Les fonctions polynomiales de n variables sont continues sur \mathbb{R}^n . Résultat admis.

Opérations sur les fonctions continues.

Somme, produit, quotient.

La composition d'une fonction continue sur \mathbb{R}^n à valeurs dans un intervalle I de \mathbb{R} par une fonction continue de I à valeurs dans \mathbb{R} est continue.

Résultats admis.

2.2 Calcul différentiel

L'introduction des notions différentielles concernant les fonctions numériques de plusieurs variables réelles se fait en se limitant aux fonctions définies sur \mathbb{R}^n . La détermination de la classe d'une fonction n'est pas au programme.

La recherche d'extremum est abordée ici, jusqu'à la condition nécessaire du premier ordre.

Les fonctions sont désormais supposées définies et continues sur \mathbb{R}^n .

Dérivées partielles, gradient

Fonctions partielles en un point.

Dérivées partielles d'ordre 1 de f .Gradient de f en un point a .Notations $\partial_i f, i \in \{1, \dots, n\}$.Notation $\nabla f(a)$ Le gradient de f en a est l'élément de \mathbb{R}^n égal à $(\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a))$:

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)).$$

Dérivées partielles d'ordre 2 de f .Notations $\partial_{i,j}^2 f = \partial_i (\partial_j f), (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$.Fonctions de classe C^1 (resp. C^2) sur \mathbb{R}^n .Les fonctions polynomiales de n variables sont de classe C^2 sur \mathbb{R}^n . Résultats admis.Opérations sur les fonctions de classe C^1 (resp. C^2).

Somme, produit, quotient.

La composition d'une fonction de classe C^1 (resp. C^2) sur \mathbb{R}^n à valeurs dans un intervalle I de \mathbb{R} par une fonction de classe C^1 (resp. C^2) sur I à valeurs dans \mathbb{R} est de classe C^1 (resp. C^2).

Résultat admis.

Pour une fonction de classe C^1 : existence et unicité d'un développement limité d'ordre 1 en un point. $f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \|h\| \varepsilon(h)$, où ε est une fonction continue en 0 et vérifiant $\varepsilon(0) = 0$.

Résultat admis.

Si f est de classe C^1 , dérivée d'une fonction définie sur \mathbb{R} par : $t \mapsto g(t) = f(x+th)$. $g'(t) = \langle \nabla f(x+th), h \rangle$; $g'(0) = \langle \nabla f(x), h \rangle$.

Interprétation géométrique du gradient.

Recherche d'extremum : condition d'ordre 1 sur \mathbb{R}^n

Définition d'un extremum local, d'un extremum global.

Condition nécessaire du premier ordre.

Point critique.

Si une fonction f de classe C^1 sur \mathbb{R}^n admet un extremum local en un point a , alors $\nabla f(a) = 0$.

Les points où le gradient s'annule sont appelés points critiques; toutes les dérivées partielles en un tel point sont nulles.

3 Compléments de probabilités; couples et n-uplets de variables aléatoires réelles

Cette section a un double objectif :

- ♦ d'une part, consolider les acquis de première année ECS concernant les variables aléatoires discrètes, et enrichir le champ des problèmes étudiés, avec, en particulier, l'étude simultanée de plusieurs variables aléatoires réelles, i.e. l'étude de vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^n ;
- ♦ d'autre part, effectuer une étude élémentaire des lois continues usuelles discrètes ou à densité.

On fera des liens entre certaines lois dans le cadre des approximations et des convergences, ainsi que les liens entre statistique et probabilités dans le cadre de l'estimation.

La théorie des familles sommables n'est pas au programme. On se limitera donc à une approche heuristique et aucune difficulté concernant la dénombrabilité ne sera soulevée. On se limitera aux énoncés suivants, admis sans démonstration :

- ♦ On admettra que les manipulations ensemblistes classiques (produits cartésiens finis, réunions dénombrables d'ensembles dénombrables fournissent encore des ensembles dénombrables). On remarquera en particulier que l'ensemble $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable (et plus généralement que l'ensemble \mathbb{N}^k est dénombrable pour tout entier $k \geq 2$);

- ♦ On admettra aussi le théorème suivant : soit I un ensemble dénombrable infini, indexé par \mathbb{N} , donc $I = \{\varphi(n); n \in \mathbb{N}\}$, avec $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow I$ bijective. Si la série $\sum_n u_{\varphi(n)}$ converge absolument alors, pour toute bijection ψ de \mathbb{N} sur I , la série $\sum_n u_{\psi(n)}$ converge absolument et les deux séries ont même somme. Cette somme commune indépendante de l'indexation φ pourra alors être notée $\sum_{i \in I} u_i$ et on dira que la série est absolument convergente (ou converge absolument).

Dans ce cadre de convergence absolue, toutes les opérations usuelles (somme, produit, regroupement par paquets, etc.) sont licites. Ainsi :

- si $I = \cup_j I_j$ est une réunion disjointe, alors on a $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$;
- si I et J sont dénombrables, alors on a $\left(\sum_{i \in I} u_i \right) \left(\sum_{j \in J} v_j \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} u_i v_j$.

Aucune difficulté ne sera soulevée sur ces notions, qui ne sont pas exigibles des élèves, et tout exercice ou problème y faisant référence devra impérativement rappeler les énoncés utiles.

3.1 Compléments sur les variables aléatoires réelles

Généralités sur les variables aléatoires réelles

On rappellera la signification de la notation $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Définition d'une variable aléatoire.

Une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[X \leq x]$ est un événement.

Le fait de vérifier qu'une fonction est une variable aléatoire n'est pas un objectifs du programme.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire.

C'est la donnée des probabilités $\mathbf{P}(X \in I)$, où I est intervalle de \mathbb{R} .

Loi d'une variable aléatoire.

La loi est caractérisée par la fonction de répartition.

Une combinaison linéaire, un produit de variables aléatoires réelles sont des variables aléatoires réelles. Le maximum et le minimum d'une famille finie de variables aléatoires réelles sont des variables aléatoires réelles.

Résultat admis.

Espérance et conditionnement pour les variables aléatoires discrètes

Espérance conditionnelle.

Si A est un événement de probabilité non nulle, $\mathbf{E}(X|A)$ est l'espérance de X , si elle existe, pour la probabilité conditionnelle \mathbf{P}_A .

Formule de l'espérance totale.

Soit X une variable aléatoire discrète et soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(A_n) \neq 0$. Alors X admet une espérance pour \mathbf{P} si, et seulement si,

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(X | A_n)$ existe;
- la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}(|X| | A_n) \mathbf{P}(A_n)$ converge.

Dans ce cas, $\mathbf{E}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}(X | A_n) \mathbf{P}(A_n)$.

3.2 Introduction aux variables aléatoires à densité

Densités et fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition d'une densité de probabilité sur \mathbb{R} .

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une densité de probabilité lorsqu'elle est continue sauf en un nombre fini de points, positive et vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

Définition d'une variable aléatoire à densité.

On dit qu'une variable aléatoire X est à densité si sa fonction de répartition F_X est continue sur \mathbb{R} et de classe C^1 sur \mathbb{R} éventuellement privé d'un ensemble fini de points.

Toute fonction f_X égale à F'_X , sauf éventuellement en un nombre fini de points, est une densité de probabilité et on dit que c'est une densité de X .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$.

Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire à densité par la donnée d'une densité f_X .

Toute densité de probabilité sur \mathbb{R} est la densité d'une variable aléatoire.

Transformation affine d'une variable à densité.

Résultat admis.

Les élèves doivent savoir calculer la fonction de répartition et la densité de $aX + b$ ($a \neq 0$).

Exemples simples de calculs de fonctions de répartition et de densités de fonctions d'une variable aléatoire à densité.

Les élèves doivent savoir retrouver les lois de X^2 et de $\varphi(X)$, avec φ de classe C^1 strictement monotone sur $X(\Omega)$.

Espérance des variables aléatoires à densité

Espérance d'une variable aléatoire à densité.

Variables aléatoires centrées.

Une variable aléatoire X de densité f_X admet une espérance $E(X)$ si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$ est absolument convergente; dans ce cas, $E(X)$ est égale à cette intégrale.

Exemple de variables aléatoires n'admettant pas d'espérance.

Linéarité et croissance de l'espérance pour les variables aléatoires à densité.

Résultat admis.

Existence d'espérance par domination.

Si X et Y sont deux variables aléatoires vérifiant $0 \leq |X| \leq Y$ presque sûrement et si Y admet une espérance alors X admet une espérance; dans ce cas, $|E(X)| \leq E(Y)$.

Résultat admis.

Théorème de transfert.

Si X est une variable aléatoire ayant une densité f_X nulle en dehors de l'intervalle $]a, b[$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, et si g est une fonction continue sur $]a, b[$, éventuellement privé d'un nombre fini de points, alors $E(g(X))$ existe et égale à l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_X(t) dt$ si, et seulement si, cette intégrale converge absolument.

On pourra admettre ou démontrer ce résultat dans le cas où g est de classe C^1 , avec g' strictement

positive (ou strictement négative) et le vérifier dans des cas simples.

Cette démonstration n'est pas exigible des élèves.

3.3 Lois de variables aléatoires à densité usuelles

Loi uniforme sur un segment $[a, b]$. Espérance. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a, b]$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}[0, 1] \iff a + (b - a)X \hookrightarrow \mathcal{U}[a, b].$$

Loi exponentielle. Caractérisation par l'absence de mémoire. Espérance. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \iff \frac{1}{\lambda}X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).$$

Loi normale centrée réduite, loi normale (ou de LAPLACE-GAUSS). Espérance. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Transformées affines de variables aléatoires suivant des lois normales. Si X suit une loi normale, et si a et b sont deux réels, avec $a \neq 0$, alors la variable aléatoire $aX + b$ suit également une loi normale.

Si $\sigma > 0$, alors

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Propriété de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Pour tout réel x , $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Exemples d'utilisation de la table de la loi normale et interprétation graphique.

Il est attendu que les élèves sachent représenter graphiquement les fonctions densités des lois normales, à l'aide de Python, et utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.

Lois γ . Espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi γ de paramètre $\nu > 0$. X suit une loi $\gamma(\nu)$, de paramètre $\nu > 0$, si X admet pour densité

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} e^{-t} & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

$$\text{avec } \Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} t^{\nu-1} e^{-t} dt.$$

Pour le calcul des moments de la loi γ , on pourra établir $\Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu)$ et $\Gamma(n + 1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.4 Variances des variables aléatoires à densité

Variance, écart-type. Variables aléatoires centrées, centrées réduites. Illustrations avec les lois usuelles.

Variance d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle (uniforme sur un segment, exponentielle, normale). On pourra donner un exemple de variable aléatoire n'admettant pas de variance.

On admettra que l'existence de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire X est équivalente à l'existence de $E(X^2)$.

3.5 n -uplets de variables aléatoires réelles ; généralisation des propriétés de l'espérance et de la variance

Dans ce qui suit, on étend la notion de loi de couple de variables aléatoires discrètes vue en première année à un n -uplet de variables aléatoires réelles (X_1, X_2, \dots, X_n) , ce qu'on appelle aussi un vecteur aléatoire réel ; puis, de manière intuitive, la notion d'espérance est étendue à une somme de variables aléatoires admettant chacune une espérance. La définition de l'espérance générale ou des moments d'une variable aléatoire dans un cadre quelconque n'étant pas au programme, toute difficulté s'y ramenant est à écarter. On admettra que les propriétés opératoires usuelles de l'espérance et la variance se généralisent aux variables aléatoires quelconques.

L'étude, pour $n > 2$, de n -uplets à composantes non indépendantes n'est pas un objectif du programme.

Généralisation

Loi d'un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^n .
Loi marginale.

La loi d'un n -uplet (X_1, \dots, X_n) de variables aléatoires réelles (vecteur aléatoire) est donnée par la fonction $F_{(X_1, \dots, X_n)}$ définie sur \mathbb{R}^n par :

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x_i]\right)$$

La loi de X_i est appelée loi marginale d'indice i . La connaissance des lois marginales ne suffit pas à déterminer la loi du vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) .

Caractérisation de la loi d'un vecteur aléatoire discret à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Si deux vecteurs aléatoires (X_1, \dots, X_n) et (Y_1, \dots, Y_n) ont même loi et si g est une fonction continue sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} , alors les variables aléatoires réelles $g(X_1, \dots, X_n)$ et $g(Y_1, \dots, Y_n)$ ont la même loi.

Aucune difficulté ne sera soulevée à ce sujet.
Résultat admis.

Indépendance

Indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles.

Les variables aléatoires réelles X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x_i]\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}([X_i \leq x_i])$$

autrement dit :

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i).$$

Caractérisations de l'indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles.

On a indépendance mutuelle si, et seulement si, pour toute famille d'intervalles réels I_1, \dots, I_n ,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \in I_i]\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}([X_i \in I_i])$$

Résultat admis.

Caractérisations de l'indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles discrètes.

On a indépendance mutuelle si, et seulement si, quel que soit $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X_i(\Omega)$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}([X_i = x_i])$$

Lemme des coalitions.

Résultat admis.

Si les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes alors, pour tout k de $\llbracket 1; k-1 \rrbracket$, toute variable aléatoire Y fonction de X_1, \dots, X_k est indépendante de toute variable aléatoire Z fonction de X_{k+1}, \dots, X_n .

Résultat admis.

Le cas particulier du couple

On généralisera les notions de linéarité, de croissance et d'existence par domination de l'espérance à des variables aléatoires quelconques.

Résultats admis.

Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes.

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors XY admet également une espérance avec en plus $E(XY) = E(X) E(Y)$.

Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Résultats admis.

Covariance de deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Propriétés.

Notation : $\text{Cov}(X, Y)$.

Bilinéarité, symétrie, positivité de la covariance.

Formule de HUYGENS.

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) E(Y).$$

Variance d'une somme.

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y).$$

Coefficient de corrélation linéaire.

Notation : $\rho(X, Y)$.

Propriétés.

$\rho(X, Y) \in [-1, +1]$. Cas extrêmes : interprétation dans le cas où $\rho(X, Y) = \pm 1$.

Si X et Y sont indépendantes et admettent un moment d'ordre 2, leur covariance est nulle.

La réciproque est fautive.

Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

Si X et Y sont indépendantes et admettent une variance, alors $X + Y$ admet une variance et

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Résultats admis.

Sommes de variables aléatoires indépendantes

Densité de la somme $Z = X + Y$ de deux variables aléatoires à densité indépendantes, produit de convolution.

On admet que : si $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$ est une intégrale convergente pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus D$, où D est un sous-ensemble fini de \mathbb{R} , et si la fonction $g : x \in \mathbb{R} \setminus D \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$ est continue alors c'est une densité de Z (au sens du programme qui exige cette régularité).

C'est le cas si une des densités f_X ou f_Y est bornée.

Stabilité de la loi gamma pour la somme.

Si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\gamma(v_1), \gamma(v_2)$, alors la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit la loi $\gamma(v_1 + v_2)$.

Loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$.

Pour étudier la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, on se ramènera après multiplication par λ à une somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$.

Stabilité de la loi normale pour la somme.

Si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépen-

dantes de lois respectives $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$, $\mathcal{N}(\mu_2, \tau^2)$, alors la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit la loi $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma^2 + \tau^2)$.

Seconde période

1 Compléments d'algèbre bilinéaire

1.1 Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien, matrices symétriques

Endomorphismes symétriques.

Un endomorphisme f d'un espace vectoriel euclidien E est dit symétrique si, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E , $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

Un endomorphisme est symétrique si, et seulement si, sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.

Si f est un endomorphisme symétrique et si F est un sous-espace vectoriel stable par f , alors F^\perp est aussi stable par f .

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien sont deux à deux orthogonaux.

Si u_1, \dots, u_p sont des vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique associés à des valeurs propres distinctes, alors ils forment une famille orthogonale (donc libre).

1.2 Projection orthogonale

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F .

Notation p_F .

Si (u_1, \dots, u_k) est une base orthonormée de F , alors pour tout vecteur x de E ,

Si \mathcal{B} est une base orthonormée de E et si, pour tout $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$, $U_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_i)$, alors

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^k \langle u_i, x \rangle u_i.$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = \sum_{i=1}^k U_i U_i^T.$$

Caractérisation du projeté orthogonal d'un vecteur par minimisation de la norme.

$$y = p_F(x) \iff \|x - y\| = \min_{z \in F} \|x - z\|.$$

Application aux problèmes de moindres carrés et à la droite de régression.

Minimisation de $X \mapsto \|AX - B\|$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ étant des matrices fixées. La formule donnant la valeur de X réalisant le minimum n'est pas exigible.

Si p est un projecteur, alors p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, c'est un endomorphisme symétrique.

1.3 Réduction des endomorphismes et des matrices symétriques

Si E est un espace vectoriel euclidien, tout endomorphisme symétrique f de E est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

Toute matrice symétrique réelle M est diagonalisable avec une matrice de changement de base orthogonale.

Résultat admis.

Il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E formée de vecteurs propres de f .

Il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $M = PDP^{-1} = PD P^T$. Les colonnes X_1, \dots, X_n de P sont des vecteurs propres de M associés respectivement à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ils forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i X_i^T$.

2 Fonctions réelles de n variables réelles définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n ; recherche d'extrema

L'objectif est de présenter la démarche de recherche d'extrema et d'en acquérir une maîtrise raisonnable à partir d'un minimum d'outils théoriques. L'espace \mathbb{R}^n sera muni de la norme euclidienne usuelle. La détermination de la nature topologique d'un ensemble n'est pas un objectif du programme; elle devra toujours être précisée. Néanmoins, il est nécessaire de sensibiliser les élèves aux notions d'ouvert et de fermé.

Les élèves ont été familiarisés avec les fonctions continues sur \mathbb{R}^n au cours de la première période de l'année, aussi on s'appuiera, pour mener une initiation à la topologie de \mathbb{R}^n , sur les sous-ensembles de \mathbb{R}^n définis par des inégalités du type $\{x \in \mathbb{R}^n; \varphi(x) < \alpha\}$ ou $\{x \in \mathbb{R}^n; \varphi(x) \leq \alpha\}$, où φ est une fonction continue sur \mathbb{R}^n et $\alpha \in \mathbb{R}$. On donnera également la définition d'un ensemble borné.

L'étude de fonctions de n variables à valeurs réelles se limitera à des fonctions définies sur des sous-ensembles de \mathbb{R}^n pouvant être définis simplement (réunion, intersection finies) à l'aide des ensembles fermés ou ouverts précédents.

Les résultats seront énoncés dans le cas de fonctions de n variables. Pour les démonstrations, on pourra se limiter aux cas $n = 2$ ou $n = 3$, mais aucune d'elles n'est exigible des élèves.

2.1 Fonctions réelles de n variables réelles définies sur une partie de \mathbb{R}^n

Dans ce paragraphe, on étend à des fonctions définies sur une partie de \mathbb{R}^n , les notions et définition vues au cours de la première période pour des fonctions définies sur \mathbb{R}^n . Toute difficulté relative à la détermination de la classe d'une fonction est exclue.

Extension de la notion de continuité aux fonctions définies sur une partie de \mathbb{R}^n .

Aucune difficulté théorique ne sera soulevée.

Extension des notions de fonctions C^1 et C^2 aux fonctions définies sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n .

Aucune difficulté théorique ne sera soulevée.

Extension des notions, vues au cours de la première période de l'année, de dérivées partielles d'ordre 1 et 2, gradient, développement limité l'ordre 1, opérations sur les fonctions de classe C^1 ou C^2 .

2.2 Compléments sur les fonctions de classe C^2 sur un ouvert de \mathbb{R}^n

Dans ce paragraphe, on introduit la notion de forme quadratique sur \mathbb{R}^n associée à une matrice symétrique réelle mais le programme n'exige aucun résultat sur cette notion qui est introduite principalement en vue de l'étude des fonctions de classes C^2 .

Théorème de SCHWARZ.

Si f est de classe C^2 sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n , alors en tout point x de \mathcal{U} et pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ on a : $\partial_{i,j}^2 f(x) = \partial_{j,i}^2 f(x)$.

Résultat admis.

Matrice hessienne en un point x .

Notation $\nabla^2 f(x)$.

Si f est de classe C^2 sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n , alors la matrice hessienne est, en tout point x de \mathcal{U} , une matrice symétrique réelle d'ordre n :

$$\nabla^2 f(x) = (\partial_{i,j}^2 f(x))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Forme quadratique q_M définie sur \mathbb{R}^n associée à une matrice symétrique réelle M d'ordre n .

Par définition, $q_M(h) = H^T M H$, où $h \in \mathbb{R}^n$ est la colonne des coordonnées de h . On remarquera qu'il existe une base orthonormale \mathcal{B} de \mathbb{R}^n telle que si $h \in \mathbb{R}^n$ a pour coordonnées h_1, \dots, h_n dans \mathcal{B} , alors on a : $q_M(h) = \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i^2$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de M .

Existence et unicité d'un développement limité à l'ordre 2 en x , élément de l'ouvert \mathcal{U} , pour f de classe C^2 sur \mathcal{U} .

$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} q_{f,x}(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$, où ε est continue en 0 avec $\varepsilon(0) = 0$ et $q_{f,x}$ est la forme quadratique associée à la matrice hessienne $\nabla^2 f(x)$ de f en x .

Résultat admis.

Dérivée seconde de la fonction de la variable réelle $g : t \mapsto f(x+th)$, définie au voisinage de 0, pour f de classe C^2 sur \mathcal{U} et $x \in \mathcal{U}$.

$g''(t) = q_{f,x+th}(h)$, donc $g''(0) = q_{f,x}(h)$.

2.3 Recherche d'extrema

Dans un premier temps, on étendra rapidement les notions vues au cours de la première période à une fonction définie sur une partie de \mathbb{R}^n .

Définition

Définition d'un extremum local, d'un extremum global.

Existence d'extrema sur un ensemble fermé borné

Rappels sur la notion de sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^n .

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et φ est une fonction réelle continue sur \mathbb{R}^n , alors $\{x \in \mathbb{R}^n; \varphi(x) \leq \alpha\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n; \varphi(x) \geq \alpha\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^n; \varphi(x) = \alpha\}$ sont des fermés de \mathbb{R}^n .

Fermé ne signifie pas non ouvert mais de complémentaire ouvert.

Toute fonction continue sur une partie fermée et bornée admet un maximum global et un minimum global.

Résultat admis.

Le maximum comme le minimum peuvent être atteints en plusieurs points.

Application à l'encadrement de la forme quadratique q_M sur \mathbb{R}^n associée à une matrice symétrique M .

q_M admet un maximum global et un minimum global sur la partie fermée bornée $\{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$; il existe donc des réels positifs α et β tels que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \|h\|^2 \leq q_M(h) \leq \beta \|h\|^2.$$

Condition d'ordre 1

Condition nécessaire du premier ordre.
Point critique.

Si une fonction f de classe C^1 sur un ouvert \mathcal{U} , de \mathbb{R}^n , admet un extremum local en un point $x_0 \in \mathcal{U}$, alors $\nabla f(x_0) = 0$.

Les points de \mathcal{U} où le gradient de f s'annule sont appelés points critiques de f sur \mathcal{U} ; toutes les dérivées partielles en un tel point sont nulles.

Condition d'ordre 2

Étude locale d'une fonction f de classe C^2 sur un ouvert \mathcal{U} en un point critique x_0 .

– Si les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0)$ sont toutes strictement positives, i.e. $\text{Sp}(\nabla^2 f(x_0)) \subset \mathbb{R}_+^*$, (respectivement négatives, i.e. $\text{Sp}(\nabla^2 f(x_0)) \subset \mathbb{R}_-^*$), alors f admet un minimum (resp. maximum) local en x_0 .

– Si $\nabla^2 f(x_0)$ admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative alors f ne présente pas d'extremum en x_0 .

On fera le lien avec le signe de la forme quadratique q_{f,x_0} associée à la matrice hessienne de f en x_0 .

Point selle (ou col).

Une condition suffisante d'extremum global.

Si \mathcal{U} est un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et si x_0 est un point critique de f :

– si pour tout $x \in \mathcal{U}$, $\text{Sp}(\nabla^2 f(x)) \subset \mathbb{R}^+$, alors f admet un minimum global en x_0 ,

– si pour tout $x \in \mathcal{U}$, $\text{Sp}(\nabla^2 f(x)) \subset \mathbb{R}^-$, alors f admet un maximum global en x_0 ,

On introduira la notion d'ouvert convexe sans soulever de difficulté théorique et la vérification de cette propriété n'est pas un objectif du programme. Résultat admis.

Recherche d'extremums sous contrainte d'égalités linéaires

Dans tout ce paragraphe, C désigne l'ensemble des solutions d'un système linéaire

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = c_1 \\ \varphi_2(x) = c_2 \\ \vdots \\ \varphi_p(x) = c_p \end{cases}$$

et \mathcal{H} l'ensemble des solutions du système homogène associé, où $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ sont des formes linéaires sur \mathbb{R}^n .

Condition nécessaire du premier ordre pour un extremum de f sous la contrainte C .

Si f est de classe C^1 sur un ouvert \mathcal{U} contenant C , et si la restriction de f à C admet un extremum local en un point $x_0 \in C$, alors $\nabla f(x_0)$ est colinéaire au vecteur $(\nabla\varphi_1(x_0), \dots, \nabla\varphi_p(x_0))$, autrement dit $\nabla f(x_0) \in \text{vect}(\nabla\varphi_1(x_0), \dots, \nabla\varphi_p(x_0))$.

Traduction en terme d'orthogonalité :

– $\mathcal{H}^\perp = \text{vect}(\nabla\varphi_1(x_0), \dots, \nabla\varphi_p(x_0))$.

- Il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot \nabla \varphi_i(x_0)$$

Point critique pour l'optimisation sous contraintes.
Exemples de recherche d'extrema sous une
contrainte d'égalités linéaires dans des cas simples.

3 Convergence d'une suite de variables aléatoires

3.1 Inégalité de MARKOV, inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV

Inégalité de MARKOV.

Si X est une variable aléatoire positive admettant
une espérance, alors pour tout réel $a > 0$,

$$\mathbf{P}(\{X \geq a\}) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{a}.$$

Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.

Si X est une variable aléatoire admettant un mo-
ment d'ordre 2, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P}(\{|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Application de l'inégalité de MARKOV à $X - \mathbf{E}(X)$.

3.2 Convergence en probabilité

Définition de la convergence en probabilité.

On dit qu'une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires
réelles convergence en probabilité vers une va-
riable aléatoire X si, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Notation $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$.

Loi faible des grands nombres pour une suite $(X_n)_n$
de variables aléatoires indépendantes admettant
une même espérance m et une même variance.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ la moyenne
arithmétique des variables aléatoires X_1, \dots, X_n ;
alors la suite $(\bar{X}_n)_n$ converge en probabilité vers
 m .

Composition par une fonction continue.

Si $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X et si f est
une fonction réelle continue sur \mathbb{R} , alors $(f(X_n))_n$
converge en probabilité vers $f(X)$.

Résultat admis.

Convergence en probabilité et somme.

Si $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X et $(Y_n)_n$
converge en probabilité vers Y , alors $(X_n + Y_n)_n$
converge en probabilité vers $X + Y$.

3.3 Convergence en loi

Définition de la convergence en loi d'une suite
 $(X_n)_n$ de variables aléatoires réelles vers X .

La suite $(X_n)_n$ convergence en loi vers X si, pour
tout réel x où la fonction de répartition F_X de X
est continue, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\{X_n \leq x\}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

Cas où les X_n et X sont à valeurs dans \mathbb{N} .	Notation $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. La convergence en loi équivaut à $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\{X_n = k\}) = \mathbf{P}(\{X = k\}).$
Exemples classiques de convergences en loi.	Si la loi de X_n est binomiale de paramètre p_n et si $p_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$ alors la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers X de loi de POISSON de paramètre λ .
Composition par une fonction continue.	Si $(X_n)_n$ converge en loi vers X et si f est une fonction réelle continue sur \mathbb{R} , alors $(f(X_n))_n$ converge en loi vers $f(X)$. Résultat admis.
Théorème de la limite centrée : si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant une espérance m et une variance $\sigma^2 \neq 0$, alors la suite des moyennes arithmétiques centrées réduites $(\bar{X}_n^*)_n$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.	La moyenne arithmétique d'indice $n \in \mathbb{N}^*$ est $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, qui devient après centrage-réduction $\bar{X}_n^* = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma}.$ En particulier, si $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\{a \leq \bar{X}_n^* \leq b\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} dt.$
Approximation gaussienne de lois binomiales ou de POISSON.	Toutes les indications devront être fournies aux candidats quant à la justification de l'utilisation des approximations.

4 Estimation

L'objectif de cette section est d'introduire le vocabulaire et la démarche de la Statistique inférentielle en abordant, sur quelques cas simples, le problème de l'estimation, ponctuelle ou par intervalle de confiance. On se restreindra à une famille de lois de probabilités indexées par un paramètre scalaire (ou vectoriel) dont la valeur (scalaire ou vectorielle) caractérise la loi. On cherche alors à estimer la valeur du paramètre (ou une fonction simple de ce paramètre) à partir des données disponibles.

Dans ce contexte, on considère un phénomène (expérience) aléatoire et on s'intéresse à une variable aléatoire relative à cette expérience, dont on suppose que la loi de probabilité n'est pas complètement spécifiée. C'est cette loi qui est l'objectif de notre travail de statistique.

Dans la pratique on possède des connaissances sur le type de loi recherché. Par exemple si la loi est une durée de fonctionnement sans phénomène d'usure et mesurée en temps continu on pense à une loi exponentielle.

On suppose dans le cadre du programme qu'il en est ainsi : la loi de X , qui n'est pas complètement spécifiée, appartient à une famille de lois indexées par un paramètre réel, parfois par un paramètre dans \mathbb{R}^2 (penser aux lois gaussiennes). On note Θ l'ensemble indexant la famille, $(F_\theta)_{\theta \in \Theta}$ la famille des fonctions de répartition de X possibles. Le paramètre θ est une quantité inconnue, fixée dans toute l'étude, que l'on cherche à déterminer ou pour laquelle on cherche une information partielle.

Dans la pratique on a souvent la possibilité d'observer des répétitions indépendantes du phénomène et obtenir un échantillon de données donnant pour X des résultats réels x_1, \dots, x_n . Le problème de l'estimation consiste alors à estimer la vraie valeur du paramètre θ ou de $g(\theta)$ (fonction à valeurs réelles du paramètre θ) ou trouver un intervalle contenant le vrai θ , à partir de l'échantillon de données x_1, \dots, x_n obtenues en observant n fois le phénomène. Cette fonction du paramètre représentera en général une valeur caractéristique de la loi inconnue comme son espérance, sa variance, son étendue ...

4.1 Estimation ponctuelle

On se place dans le cadre de « Statistique paramétrique » évoqué ci-dessus et on suppose que cet échantillon est la réalisation de n variables aléatoires X_1, \dots, X_n définies sur un même espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) muni d'une famille de probabilités $(\mathbf{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$. Les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont supposées \mathbf{P}_θ -indépendantes et de même loi que X pour tout $\theta \in \Theta$.

On appelle échantillon de taille n (n -échantillon) la donnée de n variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes et de même loi. Cette loi est notée L_θ , sa fonction de répartition F_θ .

On appelle estimateur de θ , toute variable aléatoire de la forme $Y = \varphi(X_1, \dots, X_n)$, où φ est une fonction réelle définie sur \mathbb{R}^n . Si x_k désigne la valeur obtenue pour X_k (réalisation de X_k lors de la k -ième répétition de l'expérience), alors le nombre $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ est, pour l'estimateur choisi, la valeur qu'on attribue au paramètre θ inconnu.

Estimer ponctuellement θ par $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, où (X_1, \dots, X_n) est une statistique et (x_1, \dots, x_n) est la réalisation de l'échantillon (X_1, \dots, X_n) , c'est décider d'accorder à θ la valeur $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Exemples simples d'estimateurs.

Exemples simples d'estimations.

On note Θ l'ensemble des θ ; on considère ici que Θ est un intervalle réel. Dans certains cas, qui seront précisés, Θ sera un produit cartésien de deux intervalles réels.

Exemples de n -échantillons associés à une loi de BERNOULLI $\mathcal{B}(1, p)$, avec $\theta = p$.

De façon similaire, si g est une fonction de Θ vers \mathbb{R} , on appelle estimateur de $g(\theta)$ toute variable aléatoire de la forme $T_n = \psi(X_1, \dots, X_n)$, où ψ est une fonction réelle définie sur \mathbb{R}^n . Dans ce cas, c'est le nombre $\psi(x_1, \dots, x_n)$ qui fournit la valeur qu'on attribue à $g(\theta)$.

Estimer ponctuellement $g(\theta)$ par $\psi(x_1, \dots, x_n)$ où (X_1, \dots, X_n) est une statistique et (x_1, \dots, x_n) est la réalisation de l'échantillon (X_1, \dots, X_n) , c'est décider d'accorder à $g(\theta)$ la valeur $\psi(x_1, \dots, x_n)$.

Moyenne empirique (dite aussi arithmétique) de l'échantillon : $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

Estimation de l'espérance d'une variable aléatoire : estimation du paramètre p d'une loi de BERNOULLI ; estimation du paramètre λ d'une loi de POISSON.

4.2 Estimation par intervalle de confiance

S'il existe des critères pour juger des qualités d'un estimateur ponctuel T_n de $g(\theta)$, aucune certitude ne peut jamais être apportée quant au fait que l'estimation donne la vraie valeur à estimer.

La démarche de l'estimation par intervalle de confiance consiste non plus à donner une estimation ponctuelle de $g(\theta)$ à partir d'un estimateur mais à trouver un intervalle aléatoire, appelé intervalle de confiance, qui contienne $g(\theta)$ avec une probabilité minimale donnée.

Dans tout ce paragraphe $(U_n)_{n \geq 1}$ et $(V_n)_{n \geq 1}$ désigneront deux suites de statistiques donc d'estimateurs de $g(\theta)$, telles que, pour tout $\theta \in \Theta$ et pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{P}_\theta([U_n \leq V_n]) = 1$.

Intervalle de confiance.

Soit $\alpha \in [0, 1]$; alors $[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance de $g(\theta)$, au niveau de confiance $1 - \alpha$, si pour tout $\theta \in \Theta$, $\mathbf{P}_\theta(\{U_n \leq g(\theta) \leq V_n\}) \geq 1 - \alpha$.

Les réalisations de U_n et V_n est l'estimation de cet intervalle de confiance ; elles doivent être calculables à partir du seul échantillon (x_1, \dots, x_n) observé. α mesure l'incertitude de l'intervalle, $1 - \alpha$ le degré de certitude ou de confiance.

On distinguera probabilité et confiance et on éclairera ces notions à l'aide de simulations informatiques avec Python.

Estimation par intervalles de confiance pour le paramètre d'une loi de BERNOULLI.

On pourra obtenir ces intervalles de confiance par l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV en majorant $p(1-p)$ par $\frac{1}{4}$.

Estimation par intervalle de confiance de la moyenne d'une loi normale dont l'écart type est connu.

On pourra utiliser cet exemple pour introduire la variance empirique.

4.3 Estimation par intervalle de confiance asymptotique

L'utilisation dans certains cas du théorème de la limite centrée impose d'introduire la notion d'intervalle de confiance asymptotique.

Intervalle de confiance asymptotique.

On appelle intervalle de confiance asymptotique de $g(\theta)$, au niveau de confiance $1 - \alpha$, une suite $([U_n, V_n])_{n \geq 1}$ vérifiant : pour tout $\theta \in \Theta$, il existe une suite de réels $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans $[0, 1]$, de limite α , telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbf{P}_\theta(\{U_n \leq g(\theta) \leq V_n\}) \geq 1 - \alpha_n.$$

Par abus de langage, on dit aussi que $[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance asymptotique.

Intervalles de confiance asymptotiques obtenus avec le théorème de la limite centrée.

Exemple du paramètre d'une loi de BERNOULLI.

On pourra comparer, en majorant $p(1-p)$ par $\frac{1}{4}$, les intervalles de confiance obtenus par l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV, et les intervalles de confiance asymptotiques obtenus par l'approximation normale de la loi binomiale.

4.4 Comparaison d'estimateurs

Biais d'un estimateur : dans le cas où l'estimateur T_n de $g(\theta)$ possède une espérance, le nombre réel $\mathbf{E}(T_n) - g(\theta)$ est appelé biais de l'estimateur.

On note $b_\theta(T_n) = \mathbf{E}(T_n) - g(\theta)$.

Remarquer que l'espérance est calculée à partir de la loi L_θ de X , avec θ qui est, pour le moment, un paramètre inconnu. Le biais est donc une fonction de θ .

Estimateur sans biais : un estimateur de $g(\theta)$ est dit sans biais quand il admet un biais et que ce biais est nul.

Dans ce cas, $\mathbf{E}(T_n) = g(\theta)$ pour tout $\theta \in \Theta$.

Suite $(T_n)_{n \geq 1}$ d'estimateurs.

Chaque T_n est de la forme $T_n = \psi(X_1, \dots, X_n)$.

La fonction ψ dépend de n et on peut utiliser un indice n pour rappeler cette dépendance, mais en général on omet l'indice afin d'alléger les notations.

Estimateur convergent : une suite d'estimateurs de $g(\theta)$ est dite convergente quand elle converge en probabilité vers $g(\theta)$, pour tout $\theta \in \Theta$.

Par abus de langage on dit plus simplement que l'estimateur est convergent.

Composition par une fonction continue.

Si $(T_n)_{n \geq 1}$ est une suite convergente d'estimateurs de $g(\theta)$ et si f est une fonction réelle continue sur Θ , alors $(f(T_n))_{n \geq 1}$ est une suite convergente d'estimateurs de $f(g(\theta))$.

Condition suffisante de convergence.

Une suite $(T_n)_{n \geq 1}$ d'estimateurs de $g(\theta)$ telle que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n) = g(\theta)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(T_n) = 0$ est convergente.

Cette convergence pourra être étudiée à l'aide de l'inégalité de MARKOV.

La démonstration de ce théorème donne naturellement un intervalle de confiance asymptotique de $g(\theta)$ ainsi qu'un moyen de comparer la qualité des estimateurs.

Ces notions seront illustrées à l'aide de Python.

Travaux pratiques de mathématiques avec Python

1 Préambule

1.1 Objectifs

En première année, les élèves ont acquis les bases de manipulation du logiciel Python. L'objectif de l'enseignement d'informatique de seconde année ECS est de permettre aux élèves de l'utiliser de manière judicieuse et autonome pour illustrer ou modéliser des situations concrètes en mobilisant leurs connaissances mathématiques.

Les heures de travaux pratiques de mathématiques avec Python peuvent être organisées de plusieurs façons : certaines séances, notamment celles nécessitant peu de manipulations logicielles de la part des élèves, pourront avoir lieu en classe entière ; les autres séances en groupes réduits de préférence et sur ordinateur. Les élèves, au cours de leurs études ultérieures puis de leur parcours professionnel, seront amenés à utiliser des outils informatiques divers choisis pour leurs fonctionnalités, et seule une pratique régulière de ces outils informatiques peut leur permettre d'en acquérir la maîtrise. De plus, en adoptant cette démarche exploratoire permise par le dialogue interactif avec la machine, cette pratique peut s'avérer bénéfique pour les apprentissages et faciliter la compréhension de concepts plus abstraits.

Le programme d'informatique s'articule autour de quatre thèmes :

- ◆ statistiques descriptives bivariées ;
- ◆ fonctions de plusieurs variables ;
- ◆ simulation de lois ;
- ◆ estimation ponctuelle et par intervalle de confiance.

L'ordre dans lequel les thèmes seront abordés est libre, mais il est préférable de mener ces activités en cohérence avec la progression du cours de mathématiques. Les exemples traités dans un thème devront être tirés, autant que possible, de situations réelles (traitement de données économiques, sociologiques, historiques, démographiques, en lien avec le monde de l'entreprise ou de la finance, etc.), en faisant dès que possible un rapprochement avec les autres disciplines.

Dans certains thèmes, il est nécessaire d'introduire de nouvelles notions ou approches mathématiques. Certaines seront propres à un thème particulier, d'autres (comme la méthode de Monte-Carlo) pourront au contraire être envisagées de manière transversale. Ces notions ne sont en aucun cas

exigibles des élèves et toutes les précisions nécessaires leur seront données lors de leur utilisation, et notamment lors des épreuves d'évaluation ou lors des concours.

Toute la richesse du langage Python ne peut pas être entièrement maîtrisée par un élève ; aussi seules les fonctions et commandes exigibles au programme de première année le sont aussi en seconde année, et leur syntaxe précise doit être rappelée. D'autres fonctions, par commodité, pourront être utilisées en classe, mais ceci ne pourra se faire qu'avec parcimonie. L'objectif principal de l'activité informatique reste la mise en pratique des connaissances mathématiques. Ces commandes supplémentaires devront être présentées en préambule des sujets et toutes les précisions nécessaires seront données lors de leur utilisation et leur interprétation. On favorisera à cette occasion l'autonomie et la prise d'initiatives en conseillant aux élèves la consultation de l'aide Python qui permet de prendre en main rapidement des fonctions nouvelles et évite d'avoir à connaître par cœur la syntaxe de commandes complexes.

L'objectif de ces travaux pratiques n'est pas l'écriture de longs programmes mais l'assimilation de savoir-faire et le développement de compétences spécifiés dans la liste des exigibles et rappelés en préambule de chaque thème.

1.2 Liste des savoir-faire et compétences exigibles

- C1. Produire et interpréter des résumés numériques et graphiques d'une série statistique (simple, double) ou d'une loi.
- C2. Modéliser et simuler des phénomènes (aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique.
- C3. Représenter et exploiter le graphe d'une fonction d'une ou de deux variables.
- C4. Représenter et interpréter différents types de convergences.
- C5. Utiliser la méthode de Monte-Carlo sur des exemples pertinents (calcul approché d'intégrales, de probabilités).
- C6. Porter un regard critique sur les méthodes d'estimation et de simulation.

1.3 Commandes du langage Python

Les commandes exigibles ont été listées dans le programme de première année ECS. On rappellera dans les sujets toutes les syntaxes des commandes non exigibles.

2 Liste des thèmes

2.1 Statistiques descriptives bivariées

Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : C1 et C6

On s'appuiera sur les représentations graphiques pour montrer l'intérêt et les limites des indicateurs (de position et de dispersion) étudiés.

Série statistique à deux variables, nuage de points associé.

Point moyen (\bar{x}, \bar{y}) du nuage.

Covariance empirique, coefficient de corrélation empirique, droites de régression.

On tracera le nuage de points et les droites de régression, et on pourra effectuer des pré-transformations pour se ramener au cas linéaire.

On différenciera les variables explicatives des variables à expliquer et on soulignera la distinction entre corrélation et causalité.

On pourra donner des exemples d'utilisation de la droite de régression pour faire des prévisions dans le cadre de problèmes concrets. On pourra utiliser

les commandes :

`plt.scatter`, `np.polyfit`, `np.corrcoef`.

2.2 Fonctions de plusieurs variables

Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : C2 et C3

Graphe d'une fonction de deux variables, lignes de niveau, plan affine tangent au graphe. Dérivées partielles et dérivées directionnelles, représentation du gradient.

Position du graphe par rapport au plan affine tangent au graphe, lien avec les valeurs propres de la matrice hessienne, points selles.

Étude d'extrema locaux et globaux. Extrema sous contraintes linéaire.

À cette occasion, on pourra mettre en évidence l'orthogonalité du gradient avec les courbes de niveau d'une fonction à deux variables.

Programmation de fonctions variées permettant de mettre en évidence les notions d'extrema locaux ou globaux, avec ou sans contrainte. On pourra prendre des exemples issus de l'économie ou de la finance : minimisation du risque, maximisation du gain, etc.

2.3 Simulation de lois

Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : C1, C2, C3 et C6

Ces simulations de variables aléatoires seront introduites comme illustrations de problèmes concrets, et permettront d'en vérifier la compréhension par les élèves. Dans toutes les simulations effectuées, on pourra comparer les échantillons obtenus avec les distributions théoriques, en utilisant des diagrammes en bâtons et des histogrammes. On pourra aussi tracer la fonction de répartition empirique et la comparer à la fonction de répartition théorique. On pourra utiliser les générateurs de nombres aléatoires selon les lois uniformes, binomiales, géométriques, normales, de la bibliothèque `numpy.random` : `rd.random`, `rd.binomial`, `rd.randint`, `rd.geometric`, `rd.poisson`, `rd.exponential`, `rd.normal`.

Méthode d'inversion.

Application de la méthode d'inversion pour la simulation par exemple des lois exponentielle ou de CAUCHY. On pourra mettre en évidence, grâce aux simulations, qu'une variable aléatoire suivant une loi de CAUCHY n'admet pas d'espérance.

Méthodes de simulation d'une loi géométrique.

Comparaison entre différentes méthodes : utilisation d'une loi de Bernoulli et d'une boucle `while`, utilisation d'une loi exponentielle et de la fonction `floor`, utilisation de la librairie `numpy.random`.

Simulations informatiques d'une loi normale par utilisation du théorème de la limite centrée appliqué à différentes lois.

Comparaison entre différentes méthodes de simulation d'une loi normale.

Utilisation de la librairie `numpy.random`.

On pourra s'intéresser au cas particulier de 12 variables aléatoires indépendantes suivant une même loi uniforme.

2.4 Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance

Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : C2, C4, C5 et C6

Méthode de MONTE-CARLO : principe, garanties d'approximation.

Cette méthode permet d'estimer des quantités qu'il est parfois difficile de calculer explicitement mais qu'il est facile d'approcher par simulation (pro-

<p>Comparaison de différents estimateurs ponctuels d'un paramètre.</p>	<p>babilités d'événements, espérances de variables aléatoires, calculs d'intégrales, etc.). Ainsi, on pourra estimer par exemple les valeurs prises par la fonction de répartition de la somme ou du produit de deux variables aléatoires. On pourra justifier par simulation la validité de l'approche par intervalle de confiance asymptotique à partir d'un certain rang.</p>
<p>Comparaison des intervalles de confiance d'un paramètre obtenus par différentes méthodes.</p>	<p>On pourra utiliser des données issues de situations réelles, par simple comparaison de valeurs numériques, ou créer plusieurs jeux de données par simulation. Dans ce dernier cas, on pourra comparer les lois des estimateurs par exemple à l'aide d'histogrammes. Estimation par intervalle de confiance du paramètre d'une loi de BERNOULLI et de l'espérance d'une loi normale. La comparaison pourra se faire en calculant les demi-largeurs moyennes des intervalles et leurs niveaux de confiance.</p>

Informatique

1 Préambule

Étant donné que les technologies de l'information et les sciences du numérique évoluent en permanence, le programme d'enseignement d'informatique en deuxième année ECS doit également être constamment adapté pour suivre cette évolution. Par conséquent, le Ministère de l'Éducation nationale, du Préscolaire et des Sports s'engage régulièrement à réviser les programmes d'informatique dans les classes préparatoires aux grandes écoles. Dans cette optique, le présent document a été élaboré dans le but de :

- ◆ Définir la nature et les caractéristiques de l'informatique en tant que discipline d'enseignement dans la filière ECS aux classes préparatoires des grandes écoles (CPGE) ;
- ◆ Délimiter le cadre et la vision du programme d'informatique dans les filières économiques en CPGE ;
- ◆ Indiquer les compétences à développer chez les élèves ;
- ◆ Fixer les finalités et les objectifs de chaque partie du programme ;
- ◆ Préciser les approches pédagogiques servant de référence pour préparer les activités d'apprentissage relatives à la discipline informatique ;
- ◆ Présenter le programme ainsi que la progression qui lui est attachée ;

2 Contexte de la nouvelle réforme de l'informatique en C.P.G.E.

Le programme d'informatique en deuxième année ECS des classes préparatoires aux grandes écoles de commerce vient compléter l'évolution de l'enseignement de l'informatique en première année ECS. Son objectif est de fournir aux élèves des méthodes, des outils et de concepts nécessaires à la résolution informatique de problèmes variés. Ces problèmes peuvent être liés aux disciplines de la modélisation mathématiques, l'économie et la gestion. La résolution informatique peut prendre la forme de la conception d'un programme informatique, de l'utilisation de fonctions prédéfinies dans des bibliothèques Python pour la simulation numérique, ou encore de la gestion de bases de données.

Les élèves doivent être capables d'appréhender un problème simple du monde réel, de le traduire et de le mettre en œuvre en une solution informatique. Ils doivent se familiariser avec des concepts tels que la faisabilité d'une solution donnée, la précision des calculs numériques, l'interprétation des résultats, etc.

L'accent est mis sur une formation orientée vers des travaux pratiques plutôt que des développements excessivement théoriques. Ainsi, les élèves sont encouragés à acquérir une expérience concrète et pratique, en mettant en œuvre les connaissances acquises dans des contextes réels.

Les deux aspects clés de ce programme d'enseignement en informatique en deuxième année ECS sont la gestion des bases de données et le calcul scientifique, qui constituent le socle fondamental de cette formation.

3 Objectifs généraux de la formation

Dans le cadre du programme d'informatique en deuxième année ECS des classes préparatoires aux grandes écoles de commerce, on définit des objectifs et des compétences clés visant à fournir aux élèves les bases solides en matière de gestion des bases de données relationnelles et du calcul scientifique, en mettant particulièrement l'accent sur la simulation de lois de probabilités. L'objectif global de ce programme est de développer chez les élèves des compétences fondamentales nécessaires pour mobiliser les concepts de base de modélisation informatique et les appliquer de manière efficace dans divers contextes.

En premier lieu, notre démarche vise à approfondir et consolider les concepts fondamentaux de l'informatique vues en première année, en mettant l'accent sur les simulations numériques et le calcul scientifique plus avancé. On fournit également aux élèves des capacités requises pour résoudre des problèmes concrets en utilisant des méthodes numériques appropriées et les outils informatiques adéquats.

Pour atteindre ces objectifs, on se focalise sur le développement de compétences spécifiques telles que :

- ◆ gérer efficacement une base de données relationnelle ;
- ◆ fournir des capacités d'utiliser des outils informatiques pour traiter et interpréter des données, identifier des tendances, et formuler des conclusions pertinentes ;
- ◆ savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en programme informatique ;
- ◆ être en mesure d'interpréter des résultats informatiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats ;
- ◆ savoir employer avec discernement l'outil informatique.

4 Organisation et recommandations pédagogiques

4.1 Organisation temporelle de la formation

En deuxième année ECS, le programme d'informatique répond aux besoins spécifiques des élèves dans d'autres matières, notamment pour vérifier et tester les notions acquises en mathématiques. Un parcours d'apprentissage progressif permet aux élèves, d'acquérir des bases solides en informatique avant de se perfectionner dans des domaines plus spécialisés à travers deux périodes distinctes. Grâce à ce programme, les élèves maîtrisent les techniques essentielles pour utiliser l'informatique de manière efficace et créative dans l'analyse économique, la simulation et la prise de décision.

La première période de ce programme offre une base solide pour une compréhension basique de la conception et la gestion de bases de données. un cours qui offre un aperçu général des bases de données, y compris des aspects conceptuels et manipulateurs d'une base de données. Puis, les élèves sont amenés à résoudre numériquement des intégrales par différentes méthodes de quadrature. Le parcours se poursuit avec la résolution des équations différentielles ainsi que les systèmes différentiels à l'aide de la méthode d'Euler, Enfin les statistiques bivariées fournissent aux élèves des capacités avancées en calcul scientifique.

La deuxième période de ce programme est consacrée aux techniques de modélisation avancées et de calcul scientifique. premièrement la simulation de lois de probabilités discrètes, et la simulation de lois continues, offre aux élèves des méthodes pour vérifier et comparer des résultats théoriques, puis l'estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance qui permet aux élèves de pratiquer la méthode de Monte-Carlo, Le parcours se poursuit avec les chaînes de Markov et enfin la représentation graphique des fonctions de plusieurs variables.

4.2 Recommandations pédagogiques

L'enseignement de l'informatique en deuxième année ECS aux classes préparatoires des grandes écoles vise plusieurs objectifs permettant aux élèves d'acquérir des méthodes de simulation et de maîtriser des outils informatiques, des techniques et des méthodes rigoureuses pour résoudre numériquement des problèmes d'ordre scientifique et gestionnaire (administratif, commercial...).

Le programme de l'informatique est organisé en deux périodes de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux périodes d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque période, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de la formation de ces classes préparatoires. Les séances de travaux pratiques python permettent de privilégier la mise en œuvre par les élèves.

- ◆ il est recommandé de mettre le point sur l'interprétation des résultats beaucoup plus que le langage de programmation Python ;
- ◆ il est recommandé, pour l'enseignement de l'informatique en deuxième année ECS, de s'inspirer du programme de mathématiques. Cette pratique permettra aux élèves de construire ou de reconnaître des fonctions prédéfinies relevant par exemple de la simulation de lois, de la recherche de valeurs approchées ;
- ◆ il est recommandé de donner des exemples et de proposer des exercices inspirés des autres disciplines (économie, comptabilité, statistiques, ...);
- ◆ il n'est pas demandé d'aborder les aspects théoriques mais de vérifier et d'analyser les résultats surtout concernant l'utilisation des bibliothèques numériques.

Première période

1 Bases de données

Cette partie vise à initier les élèves aux bases de données relationnelles et à leur manipulation à l'aide du langage SQL utilisé avec le système de gestion de bases de données SQLite. À la fin de cette section, les élèves devront être capables d'exprimer des requêtes SQL permettant d'insérer, mettre à jour et supprimer des données d'une base de données relationnelles, ainsi que d'interroger une base de données pour extraire des informations précises à l'aide de requêtes SQL.

Vocabulaire des bases de données relationnelles
Notion de clé primaire et étrangère.
Présentation de SQLite comme système de gestion de base de données.
Interrogation d'une base de données relationnelle : requête SELECT (projection) avec simple clause WHERE (sélection).

Présenter les concepts suivants à travers des exemples : table (relation), attribut (colonne), enregistrement (ligne), domaine et types de données, schéma de données.
Expliquer les notions de projection et sélection.
Expliquer l'intérêt d'utilisation du mot clé DISTINCT.

Tri des résultats et limitation d'affichage.	Utiliser les opérateurs suivants pour exprimer des conditions : =, !=, >, <, >=, <=, AND, OR, NOT, IN, LIKE, BETWEEN ... AND ... Trier les résultats : ORDER BY, ASC, DESC.
Jointure interne.	Introduire la notion de jointure en mentionnant le fait que le résultat d'un produit cartésien peut ne pas avoir de sens. Utiliser les jointures internes pour effectuer des requêtes multi-tables.
Fonctions d'agrégation et groupement des lignes avec la clause GROUP BY. Filtrage des résultats de groupement avec HAVING.	Utiliser les fonctions d'agrégation MIN, MAX, SUM, AVG et COUNT sur une table. Mentionner le fait que les fonctions d'agrégations peuvent s'utiliser sans GROUP BY. Marquer la différence entre WHERE et HAVING sur des exemples.
Requêtes imbriquées : syntaxe et opérateurs de comparaison	Expliquer la syntaxe générale des sous-requêtes dans une clause WHERE, FROM, ou HAVING. Utiliser les opérateurs =, <, >, !=, <=, >=, IN / NOT IN, et EXISTS/NOT EXISTS, pour comparer les résultats de sous-requêtes. Donner quelques exemples de requêtes imbriquées.
Langage de manipulation des données (insertion, modification et suppression des lignes d'une table.	Donnez la syntaxe des différentes requêtes de manipulation de données : requêtes INSERT INTO, UPDATE et DELETE FROM, et les appliquer sur des exemples.

2 Intégration numérique

Au terme de cette section, on vise à initier les élèves aux diverses techniques d'intégration numérique et à leur fournir les capacités nécessaires pour approximer des intégrales définies.

Introduire l'intégration numérique. Formules élémentaires et composites des méthodes des rectangles et des trapèzes. Implémentation Python comparaison des méthodes. Syntaxe de la fonction quad.	Mettre en évidence le lien entre l'intégration numérique et la discrétisation de l'aire sous une courbe. Introduire la méthode des rectangulaires : gauche, droite et point milieu. Implémentation de méthode des rectangles. Implémenter la méthode des trapèzes. Comparer les différentes méthodes.
--	---

3 Équation et systèmes différentiels

Dans cette section, l'intention est de mettre en pratique les concepts abordés lors du cours de mathématiques. Nous examinerons des exemples simples pour illustrer des notions qualitatives des équations différentielles, sans requérir de compréhension technique approfondie. Il est important de noter que la discrétisation d'une équation différentielle ne fait pas partie du programme.

L'objectif est d'implémenter en Python la méthode d'Euler pour résoudre des équations différentielles, qu'elles soient d'ordre 1 ou 2. En plus de cette approche fondamentale, la section abordera des techniques spécifiques pour résoudre les systèmes différentiels. Un aspect clé de cette partie sera la création de représentations graphiques de trajectoires, offrant ainsi une représentation graphique des solutions des équations différentielles. En maîtrisant ces méthodes, les élèves seront capable à aborder des problèmes dynamiques dans divers domaines en économie.

Méthode d'Euler pour les équations différentielles d'ordre 1.	Décrire le principe de la méthode d'Euler explicite, implicite et modifié
Méthode d'Euler pour les équations différentielles d'ordre 2.	Expliquer le passage de l'équation différentielle d'ordre 2 à l'ordre 1.
Systèmes différentiels.	Appliquer la méthode d'Euler au système différentielle.
Représentations graphiques de trajectoires.	Comparer les méthodes avec celle de python <code>odeint</code> , Représenter graphiquement des trajectoires.

4 Statistiques descriptives bivariées

On vise à fournir aux élèves une compréhension approfondie des statistiques descriptives bivariées à l'aide de Python. En conséquence, les élèves doivent être capable à évaluer les relations entre les variables en utilisant des mesures statistiques fondamentales telles que le coefficient de corrélation.

En participant à des exercices pratiques, les élèves acquerront des outils dans la création de visualisations de données, l'interprétation de graphiques de dispersion et la mise en œuvre de stratégies de régression linéaire pour l'analyse prédictive. À la fin, les élèves doivent être capables de manipuler efficacement des fichiers de données en utilisant les fonctions des bibliothèques Python telles que NumPy et Pandas.

Série statistique à deux variables, nuage de points associé.	Visualiser le nuage de points à l'aide de la fonction <code>scatter()</code> .
Point moyen (\bar{x}, \bar{y}) du nuage.	Créer des graphiques de dispersion, afficher les différentes variables par rapport aux autres. Visualiser les relations entre les variables.
Covariance et coefficient de corrélation empiriques.	Différencier les variables explicatives des variables à expliquer. Calculer le coefficient de corrélation et de covariance à l'aide de fonctions Python : <code>(numpy.cov())</code> et <code>(numpy.corrcoef())</code> Appliquer la covariance et la corrélation aux différentes variables statistiques.
Introduction à la régression linéaire simple (<code>numpy.polyfit()</code> , <code>matplotlib.pyplot.plot()</code>). Application des concepts de régression à un ensemble de données du monde réel	Interpréter les coefficients de régression en contexte avec l'ensemble de données en fournissant des exemples pratiques de régression linéaire simple. Utilisez la fonction <code>polyfit()</code> de NumPy pour l'ajustement d'une ligne de régression.

Deuxième période

1 Simulation de variables aléatoires discrètes

L'objectif de cette section est de continuer le développement des méthodes de simulation des expériences aléatoires vues en première année, en abordant la simulation des variables aléatoires discrètes, en mettant en œuvre des méthodes particulières et par la méthode d'inversion de la fonction de répartition. Pour concrétiser ces concepts, et pour comparer les résultats obtenus, les élèves doivent utiliser des fonctions prédéfinies du module `np.random`. Un aspect essentiel de cette section sera la vérification graphique de la pertinence d'une simulation de loi, offrant ainsi aux élèves un outil graphique pour évaluer la fiabilité de leurs simulations.

Simulation de v.a.r uniforme discrète

Simulation de v.a.r de Bernoulli de paramètre p

Simulation de v.a.r. suivant une loi binomiale

Simulation d'une v.a.r. suivant une loi géométrique

Application au calcul d'espérances et de variance

Méthode d'inversion de la fonction de répartition

Simulation de la loi de Poisson et géométrique par la méthode d'inversion

Vérification graphique de la pertinence des simulations

Utiliser des méthodes particulières pour simuler des expériences aléatoires élémentaires conduisant à une loi usuelle.

Représentation graphique : `plot`, `show`, `bar`.

Utilisation des fonctions de module `np.random` : `rd.randint`, `rd.binomial`, `rd.geometric`, `rd.poisson`.

Calcul de l'espérance et de la variance.

Théorème d'inversion de la fonction de répartition et application à la simulation de loi géométrique et Poisson.

2 Simulation de variables aléatoires continues

L'objectif principal de cette section est d'initier les élèves aux simulations de lois de probabilités continues usuelles. Ils seront capables de mettre en pratique la méthode d'inversion de la fonction de répartition dans le cas des lois continues. En outre, ils devront être en mesure d'appliquer le théorème central limite pour simuler la loi normale. En complément, la section mettra l'accent sur la vérification graphique de la pertinence des simulations, permettant aux élèves d'évaluer visuellement la précision de leurs simulations.

Méthode d'inversion de la fonction de répartition dans le cas continu :

Principe de la méthode.

Simulation de v.a.r uniforme continue.

Simulation de v.a.r qui suit la loi exponentielle ou de Cauchy.

Calcul de l'espérance et la variance, et les comparer avec les valeurs théoriques.

Représentations graphiques : comparaison de l'histogramme des fréquences avec la fonction de densité.

Comparaison fonction de répartition empirique et théorique.

Des commandes Python exigibles dans la librairie `numpy.random` : `rd.random`, `rd.exponential`, `rd.normal`

Des commandes Python exigibles dans la librairie `matplotlib.pyplot` : `plt.hist`, `plt.show`.

Des commandes Python exigibles dans la librairie `scipy.special` : `sp.ndtr`.

Visualiser la convergence vers la loi normale d'espérance m et d'écart type σ .

Afficher côte à côte l'histogramme des fréquences et la fonction de densité.

Afficher côte à côte la fonction de répartition empirique et théorique

Application du théorème central limite pour simuler la loi normale.
Les fonctions du module `np.random`.

Comparaison entre différentes méthodes de simulation d'une loi normale. On pourra s'intéresser au cas particulier de 12 variables aléatoires indépendantes suivant une même loi uniforme.

3 Estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance

L'objectif de cette section est d'initier les élèves au principe fondamental des méthodes de Monte-Carlo. Ils apprendront à appliquer ces méthodes pour estimer divers paramètres tels que la probabilité d'un événement, l'espérance d'une variable aléatoire, la valeur d'une intégrale et le calcul d'une somme d'une expression. Une fois ces estimations obtenues, les élèves seront capable de comparer les différents estimateurs ponctuels, En complément, On leur fournira, par la suite, la capacité à estimer le niveau réel, à rang n fini, d'intervalles de confiance asymptotiques, permettant ainsi une évaluation robuste de la précision des estimations obtenues par la méthode de Monte-Carlo.

Principe de la méthode de MONTE-CARLO.
Application aux calculs d'une probabilité ou d'une espérance.
Calcul des sommes, des intégrales et des d'aires.
Comparaison de différents estimateurs ponctuels.
Calcul du niveau de confiance réel d'un intervalle de confiance.

Utiliser la loi faible des grands nombres.
Utiliser le théorème limite central.
Estimer une espérance, une probabilité.
Calculer une intégrales, le comparer avec la fonction `quad` de Python.
Calculer une valeur approchée de np.pi .
Calculer la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
Comparer de différents estimateurs ponctuels vue dans le cours des mathématiques.
Estimer par intervalle de confiance le paramètre d'une loi de Bernoulli et de l'espérance d'une loi normale. La comparaison pourra se faire en calculant les demi-largeurs moyennes des intervalles et leurs niveaux de confiance.

4 Chaînes de Markov

Au cours de cette section, les élèves doivent être capable d'écrire la matrice de transition ainsi que le graphe d'une chaîne de Markov. Ils doivent être capable de simuler n termes d'une chaîne de Markov, ce thème sera l'occasion de revoir les simulations de lois discrètes, et d'appliquer les résultats et techniques d'algèbre linéaire vues en mathématiques. En complément, on fournit aux élèves des capacités à déterminer la loi stationnaire d'une chaîne de Markov, offrant ainsi une compréhension approfondie des états à long terme de d'une chaîne de Markov.

Définitions et exemples.
Graphe de transition.
Matrice de transition.
Simulation d'une trajectoire.
Comportement limite.

On pourra étudier par exemple :
Modéliser l'évolution d'une société (passage d'individus d'une classe sociale à l'autre)
Indice de popularité d'une page web (pageRank)
Système de bonus-malus en assurance.
Visualiser la convergence en loi d'une chaîne de Markov vers son état stable.

5 Fonctions de plusieurs variables

L'objectif de cette section est de fournir aux élèves des outils pour tracer en Python, à l'aide de la bibliothèque `matplotlib.pyplot`, le graphe d'une fonction à plusieurs variables. En plus de cela, les élèves doivent être capable de créer un champ de gradients et de lignes de niveau, on pourra mettre en évidence l'orthogonalité du gradient avec les lignes de niveau d'une fonction de deux variables.

Représentation graphique de fonction à deux variables.

Représentation graphique des lignes de niveau.

Représentation graphique de champ de gradients d'une fonction.

Représentation graphique de plan affine tangent au graphe.

Importer :

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

Liste de commandes : `np.linspace`, `np.meshgrid`, `plt.show()`, `plt.contour`, `plt.quiver`, `ax.plot_surface`.

Visualiser l'orthogonalité du gradient avec les tangentes de graphe.

Visualiser le plan tangent.

Histoire, Géographie et Géopolitique du monde contemporain

Module IV. Géodynamique de l'Union européenne et des Amériques

Objectif général du Module

Présenter la construction européenne depuis 1945 à nos jours.

Volume horaire du Module

36 heures

Capacités ciblées

- ◆ rédiger une réflexion sur un sujet sans documents;
- ◆ rédiger une synthèse de documents;

Contenus du Module

Contenu

Objectifs

Thème 12. Union européenne et ses territoires : construction, élargissement, intégration et fragmentation

Analyser la nature des relations entre l'Union Européenne et son voisinage proche.

12.1. Histoire de la construction européenne depuis 1945

- les débuts d'une construction européenne limitée mais fondatrice;
- 1957-1992 : l'intégration par le marché;
- depuis 1992 : vers la Grande Europe.

Présenter l'histoire de la construction de l'UE depuis 1945.

12.2. L'Union européenne : processus d'élargissement

- les différentes phases d'élargissement;
- l'élargissement vers l'Est : opportunités et menaces.

Analyser les conséquences de l'élargissement de l'UE.

12.3. L'Union européenne : intégration et fragmentation

- l'union européenne : un processus d'intégration inédit;
- l'union européenne : crises et fragmentation.

Mettre en évidence la dynamique d'intégration et les risques de fragmentation de l'UE.

Thème 13. Union européenne et son voisinage proche : la Russie et la méditerranée*Analyser la nature des relations entre l'Union Européenne et son voisinage proche.***13.1. Russie : opportunité et menace pour l'Union Européenne**

- la Russie une source d'insécurité et d'instabilité pour l'UE
 - la Russie et UE : prisonniers de leurs interdépendances.
- Analyser les opportunités et les menaces que représentent le voisinage russe pour l'UE.

13.2. Union européenne et l'espace méditerranéen

- la Méditerranée : un étranger proche stratégique ;
 - les liens entre l'UE et la Méditerranée.
- Analyser l'intérêt stratégique de l'espace méditerranéen pour l'UE.

13.3. UE et son voisinage : freins et controverses

- les freins au rapprochement entre Russie et UE ;
 - l'espace méditerranéen un sujet de controverse au sein de UE.
- Analyser les contraintes liées au voisinage de l'UE.

Thème 14. Place de l'Union européenne dans l'échiquier mondial*Présenter la position de l'UE au sein de l'échiquier mondial.***14.1. L'Union Européenne (UE), un géant économique au défi de ses faiblesses**

- un pôle majeur de l'économie mondiale ;
 - l'UE face aux économies émergentes ;
 - l'UE : une puissance économique à deux vitesses.
- Identifier les forces et les faiblesses de l'UE.

14.2. UE, une puissance normative en question

- l'UE : un modèle de puissance basé sur les normes ;
 - les normes de l'UE : un levier du soft power ;
 - le recours aux normes : un aveu d'impuissance.
- Analyser le modèle de la puissance de l'UE.

14.3. UE : un nain politique

- un poids politique relativement faible ;
 - l'atlantisme militaire : un signe d'échec des politiques communautaires ;
 - une influence en déclin face à la montée des pays émergents.
- Analyser les faiblesses géopolitiques de l'UE.

Thème 15. La France dans les dynamiques régionales et mondiales*Présenter le rôle de la France dans sa sphère locale, régionale et internationale.***15.1. la France depuis 1945 : repenser un modèle en voie de mutation**

- caractéristiques du modèle français ;
 - crises et réformes du modèle socio-économique français à partir de 1945.
- Analyser les caractéristiques du modèle de l'état français.

15.2. La France et son voisinage européen

- l'engagement au sein de l'Union Européenne ;
 - les relations avec le reste de l'Europe.
- Situer la France dans son voisinage européen.

15.3. La place de la France dans l'échiquier géopolitique mondial

- la France : une influence mondiale ;
- Situer la France dans son échiquier mon-

- l'influence française dans le monde extra-européen. dial.

Thème 16. Situer la France dans son échiquier mondial

Décrire le processus historique de la construction des territoires et des sociétés américaines.

16.1. Le continent américain : colonisation et indépendance

- le temps des colonisations ;
 - des processus d'indépendance différents.
- Caractériser les périodes de colonisation et d'indépendance des pays du continent américain.

16.2. Le processus de formation des états-nations américains

- les grandes aires culturelles en Amérique ;
 - la construction politique difficile des états américains.
- Analyser le processus de formation des états dans le continent américain.

Thème 17. Géopolitique de L'Amérique latine : émergences et crises

Analyser les atouts et les entraves de l'émergence latino-américaine.

17.1. L'Amérique latine : un continent en mutation

- un potentiel spatial, humain et économique réel ;
 - une émergence récente ;
 - l'intégration régionale : une tentative d'émancipation.
- Apprécier les mutations (économiques, sociales, géopolitiques... etc.) enregistrées au niveau de l'Amérique latine.

17.2. Les entraves de l'émergence latino-américaine

- le maintien des inégalités
 - zone grise de la mondialisation illicite ;
 - l'intégration régionale : un bilan mitigé.
- Analyser les entraves à l'émergence de l'Amérique latine.

Thème 18. États-Unis et l'exercice de la puissance

évaluer les aspects de la puissance américaine et ses manifestations dans un ordre mondial en recomposition.

18.1. Fondements et évolution de la puissance économique états-unienne

- l'émergence d'une grande puissance industrielle (avec des acteurs en harmonie) ;
 - un territoire maîtrisé riche en ressources stratégiques.
 - américanisation de l'économie mondiale.
- Analyser les fondements et les évolutions de la puissance américaine depuis 1945.

18.2. Une société diversifiée à multiples facettes

- une nation d'immigrants ;
 - une société d'inégalité et de précarité sociale (absence de l'état providence)
- Apprécier le rôle de la diversité sociale dans le processus de la puissance états-unienne.

18.3. Des positionnements géoéconomique et géopolitique menacés et en contestation

- une politique étrangère tantôt isolationniste, tantôt interventionniste ;
 - de nouvelles préoccupations géopolitiques mondiales.
- Analyser les positions géopolitiques et géoéconomiques des États-Unis.

Recommandations et Précisions

Recommandations

Références bibliographiques

Thème 12. Union européenne et ses territoires : construction, élargissement, intégration et fragmentation.

- l'étude de l'Union européenne doit mettre en évidence les débats et les choix opérés depuis le début des années 1990, notamment sur les articulations entre approfondissements et élargissements,
 - l'étude de l'Union européenne doit également mettre en évidence les débats sur les choix opérés en matière des modes de gouvernance adoptés dans l'Union européenne ;
 - analyser les conséquences de la fragmentation sur le processus de construction de l'UE ;
 - mettre en évidence la fracture socio-économique au sein de l'union européenne (clivage Est-Ouest).
- ◆ *Comprendre le monde*. Les relations internationales expliquées à tous Ed. 7 ; Auteur : boniface, Pascal ; Éditeur : armand Colin ; 2023
 - ◆ *Relations internationales 2023-2024 – Cours et QCM*. Auteur : beauchesne, Bénédicte, Cavaillé, Jean-Philippe ; Éditeur : ellipses ; 2022
 - ◆ *Le réveil géopolitique de l'Europe*. Auteur : midelaar, Luuk Van ; éditeur : collège de France ; 2022
 - ◆ *ECG 2 – Histoire Géographie Géopolitique du monde contemporain – Programmes 2022 Tout-en-un*. Yannick Clavé, Édouard de Bélizal, Maie Gérardot, Thomas Merle ; Parution : août 2022, Collection : j'intègre ; Marque : dunod

Thème 13. Union européenne et son voisinage proche : la Russie et l'espace méditerranéen.

- discuter les nombreuses violations des normes européennes par la Russie
 - mettre en évidence les intérêts économiques mutuels entre la Russie et l'UE ;
 - montrer en quoi les pays d'Europe Centrale et Orientale constituent une sphère d'intérêt vital pour la Russie ;
 - montrer en quoi la Russie est une source d'insécurité pour les pays Baltes ;
 - identifier les arguments qui justifient que l'Accord de Partenariat et de Coopération (APC) constitue une opportunité pour l'esquisse d'un rapprochement entre l'Union Européenne et la Russie.
 - analyser les relations germano-russes et le rapprochement Euro-russe
 - mettre en évidence les différents liens d'interdépendance qui marquent les relations euro-russes (les relations gazières, le marché européen présente un fort débouché pour l'économie russe).
 - mettre l'accent sur la politique de l'étranger proche et la politique européenne de voisinage ;
 - identifier les freins internes et externes au rapprochement (Idéologie, l'Otan, les alliances etc.) ;
 - expliquer en quoi la Méditerranée est un espace géostratégique pour l'UE ;
 - analyser les controverses sur les modèles d'intégration de la méditerranée dans l'espace euro-méditerranéen ;
 - l'introduction de nouveaux partenaires straté-
- ◆ *La guerre contre l'Ukraine ou la fin du monde russe*. Faure, Christian, Editeur : l'Harmattan Année de Publication : 2023
 - ◆ *Comprendre le monde : les relations internationales expliquées à tous*. Ed. 7 ; Auteur : boniface, Pascal ; Éditeur : armand Colin ; 2023
 - ◆ *Relations internationales 2023-2024 – Cours et QCM*. Auteur : beauchesne, Bénédicte, Cavaillé, Jean-Philippe ; Éditeur : ellipses ; 2022
 - ◆ *Le réveil géopolitique de l'Europe*. Auteur : midelaar, Luuk Van ; Éditeur : collège de France ; 2022
 - ◆ *ECG 2 – Histoire Géographie Géopolitique du monde contemporain – Programmes 2022*. Tout-en-un ; Yannick Clavé, Edouard de Bélizal, Maie Gérardot, Thomas Merle ; Parution : août 2022 ; Collection : j'intègre ; Marque : dunod
 - ◆ *Tout comprendre à la géopolitique 1200 concepts pour réussir vos concours et examens*. Anne Battistoni-Lemière ; Collection : HORS COLLECTION ; Marque : armand Colin ; 2022

giques (puissances émergentes) pour l'espace méditerranéen face au retrait de l'UE.

Thème 14. Place de l'Union européenne dans l'échiquier mondial.

- mettre en évidence la puissance industrielle, agricole de l'UE, et sa forte insertion dans les réseaux de la mondialisation ;
 - mettre l'accent sur le retard économique des pays de l'Europe de l'Est qui constitue un frein à une Europe puissante ;
 - la préférence pour la norme, est la base du modèle européen de la puissance, le soft power européen ... L'UE exerce une influence sur les normes en vigueur dans l'économie mondiale...
 - une capacité de défense qui fait défaut à l'UE, Politique étrangère et de sécurité commune : des résultats médiocres
 - la puissance normative du marché européen : l'UE, est un acteur majeur des négociations économiques internationales (un poids commercial qui lui donne un pouvoir de négociation ;
 - une multipolarité et une représentation plurielle des intérêts condamnant l'UE à l'impuissance, le hard power européen autre facette d'impuissance ?
 - une présence contestée et concurrencée au niveau des anciennes zones d'influences
- ◆ *La norme sans la force. L'énigme de la puissance européenne.* Zaki Laïdi, 2005
 - ◆ *Ramses 2023 : l'Europe dans la guerre.* Auteur : i.F.R.I., Montbrial, Thierry de David, Dominique ; Éditeur : dunod ; 2022
 - ◆ *Comprendre le monde : les relations internationales expliquées à tous.* Ed. 7 ; Auteur : boniface, pascal ; Éditeur : armand Colin ; 2023
 - ◆ *Relations internationales 2023-2024 – Cours et QCM.* Auteur : beauchesne, Bénédicte, Cavaillé, Jean-Philippe Editeur : ellipses ; 2022
 - ◆ *Le réveil géopolitique de l'Europe.* Auteur : midelaar, Luuk Van ; Éditeur : collège de France ; 2022
 - ◆ *ECG 2 – Histoire Géographie Géopolitique du monde contemporain – Programmes 2022.*
 - ◆ *Tout-en-un.* Yannick Clavé, Edouard de Bélizal, Maie Gérardot, Thomas Merle ; Parution : août 2022 Collection : j'intègre ; Marque : dunod
 - ◆ *Tout comprendre à la géopolitique 1200 concepts pour réussir vos concours et examens.* Anne Battistoni-Lemière ; Collection : HORS COLLECTION ; Marque : armand Colin ; 2022

Thème 15. France dans les dynamiques régionales et mondiales.

- l'étude de la 5ème république devrait s'inscrire dans une perspective géopolitique ;
 - repenser l'organisation politique comme un outil au service des intérêts stratégiques de la France ;
 - mettre l'accent sur la particularité de la France comme une « nation-projet », et comme une « puissance moyenne d'influence mondiale »
 - les caractéristiques du modèle français seront déterminées par rapport à son histoire, à son territoire, sa démographie et son volontarisme politico-économique ;
 - les relations avec le reste de l'Europe traiteront entre autres essentiellement la Russie, le Caucase et les pays baltes
 - l'influence française dans le monde extra-européen doit se focaliser essentiellement sur l'Afrique, le PMO et l'indopacifique.
- ◆ *Politique étrangère de la France.* Maxime Lefebvre, Collection : que sais-je ? 2022
 - ◆ *L'autre pays du soft power.* Frédéric. Munier ; le Dictionnaire de géopolitique et de géoéconomie 2011.
 - ◆ *France 2023 – Les données clés.* Auteur : la Documentation française ; 2023.
 - ◆ *ECG 2 – Histoire Géographie Géopolitique du monde contemporain – Programmes 2022, Tout-en-un.* Yannick Clavé, Edouard de Bélizal, Maie Gérardot, Thomas Merle ; Parution : août 2022, Collection : j'intègre Marque : dunod
 - ◆ *Géographie de la France – 2e Edition.* Eloïse Libourel ; Collection : portail, Armand Colin ; juillet 2023
 - ◆ *Géopolitique de la projection aérienne française de 1945 à nos jours.* Auteur : sand, Ivan ; Editeur : la Documentation française ; 2022

Thème 16. Amériques : histoires, territoires, cultures et sociétés.

- faire un rappel sur l'Amérique précolombienne ;
- ◆ *Questions Internationales : Amérique Latine – n°112.* Auteur : collectif ; Editeur : la Documenta-

- préciser ce qu'on entend par Amérique du Sud et du Nord.
- ♦ *Comprendre le monde : les relations internationales expliquées à tous*. Ed. 7 ; Auteur : boniface, Pascal ; Editeur : armand Colin ; 2023
- ♦ *Relations internationales 2023-2024 – Cours et QCM*. Auteur : beauchesne, Bénédicte, Cavaillé, Jean-Philippe ; Editeur : ellipses ; 2022
- ♦ *ECC 2 – Histoire Géographie Géopolitique du monde contemporain – Programmes 2022, Tout-en-un*. Yannick Clavé, Edouard de Bélizal, Maie Gérardot, Thomas Merle ; Parution : août 2022 ; Collection : j'intègre ; Marque : dunod
- ♦ *Tout comprendre à la géopolitique 1200 concepts pour réussir vos concours et examens*. Anne Battistoni-Lemière ; Collection : HORS COLLECTION ; Marque : armand Colin ; 2022
- ♦ *Géopolitique de l'Amérique latine : 40 fiches pour comprendre le monde*. Collection dirigée par Pascal Boniface Ed. 1 ; Ventura, Christophe ; Eyrolles ; 2022

Thème 17. Géopolitique de L'Amérique latine : émergences et crises

Intégrer les Caraïbes dans l'Amérique Latine

- ♦ *Relations internationales 2023-2024 – Cours et QCM*. Auteur : beauchesne, Bénédicte, Cavaillé, Jean-Philippe ; Editeur : ellipses ; 2022
- ♦ *ECC 2 – Histoire Géographie Géopolitique du monde contemporain – Programmes 2022, Tout-en-un*. Yannick Clavé, Edouard de Bélizal, Maie Gérardot, Thomas Merle ; Parution : août 2022 ; Collection : j'intègre ; Marque : dunod
- ♦ *Géopolitique de l'Amérique latine : 40 fiches pour comprendre le monde*. Collection dirigée par Pascal Boniface Ed. 1 ; Ventura, Christophe ; Eyrolles ; 2022
- ♦ *Tout comprendre à la géopolitique 1200 concepts pour réussir vos concours et examens*. Anne Battistoni-Lemière ; Collection : HORS COLLECTION ; Marque : armand Colin ; 2022

Thème 18. États-Unis et l'exercice de la puissance.

De nouvelles préoccupations géopolitiques mondiales : il s'agit des menaces chinoises et russes, les préoccupations nucléaires, les défis environnementaux, les enjeux sécuritaires etc.

- ♦ *Hégémonie contestée : les nouvelles formes de domination internationale*. Bertrand Badie ;
- ♦ *Vers la guerre : l'Amérique et la Chine dans le piège de Thucydide ?*. Graham Allison
- ♦ *Comprendre le monde : les relations internationales expliquées à tous Ed. 7*. Auteur : boniface, Pascal ; Editeur : armand Colin ; 2023
- ♦ *Géopolitique des États-Unis : 40 fiches illustrées pour comprendre le monde Ed. 1*. Auteur : naves, Marie-Cécile ; Editeur : eyrolles ; 2018
- ♦ *ECC 2 – Histoire Géographie Géopolitique du monde contemporain – Programmes 2022 ; Tout-*

en-un. Yannick Clavé, Edouard de Bélizal, Maie Gérardot, Thomas Merle ; Parution : août 2022 ; Collection : j'intègre ; Marque : dunod

- ◆ *Tout comprendre à la géopolitique 1200 concepts pour réussir vos concours et examens*. Anne Battistoni-Lemière ; Collection : HORS COLLECTION ; Marque : armand Colin ; 2022
- ◆ *Géopolitique de l'Amérique latine : 40 fiches pour comprendre le monde*. Collection dirigée par Pascal Boniface Ed. 1 ; Ventura, Christophe ; Eyrolles ; 2022

Module V. Géopolitique de l'Afrique, du PMO et de l'Asie

Objectif général du Module

Analyser les spécificités des États, des territoires et des sociétés africains.

Volume horaire du Module : 36 heures

Capacités ciblées

- ◆ rédiger une réflexion sur un sujet sans documents ;
- ◆ rédiger une synthèse de documents ;

Contenus du Module

Contenu

Objectifs

Thème 19. Afrique : États, territoires, cultures et sociétés

Décrire et analyser les spécificités des États, territoires et sociétés africains.

19.1. Afrique : un continent riche, une population pauvre

- des ressources géoéconomiques abondantes et variées ;
- une mosaïque de peuples, une diversité ethnique et des disparités régionales.

Apprécier la diversité naturelle, culturelle et sociale de l'Afrique.

19.2. Afrique : un continent riche, une population pauvre

- des États marqués par le poids du colonialisme ;
- l'Afrique d'aujourd'hui : reconfiguration politique et repositionnement stratégique.

Thème 20. Le développement de l'Afrique : politiques et enjeux

Présenter les maux et les trajectoires du développement en Afrique.

20.1. Afrique : un continent fragile à la marge du développement

- l'héritage colonial : retards et troubles de développement ;
- un continent marginalisé dans les échanges mondiaux ;
- les blocages des économies africaines : rente et/ou endettement.

Analyser les facteurs du sous-développement en Afrique.

20.2. Afrique : un continent à deux vitesses

- des économies en mutation : le temps de la croissance ; Analyser la place de l'Afrique dans la mondialisation.
- une inégale intégration des territoires dans la mondialisation ;
- l'Afrique face aux défis du XXIème siècle.

Thème 21. Géopolitique du continent africain : ingérence, coopération et dépendance

Présenter la position stratégique de l'Afrique ballotée entre l'ingérence la coopération et la dépendance.

21.1. Afrique : arc de crises traversé par de multiples conflits

- l'Afrique : un espace conflictuel Analyser les effets des crises et des ingérences sur la réalité africaine.
- l'Afrique face à l'instabilité politique et les États faillis ;
- l'Afrique : victime d'une ingérence étrangère.

21.2. Afrique : un espace central pour les grands acteurs internationaux

- l'Afrique est stratégique pour les grands acteurs internationaux... Analyser la centralité de l'Afrique pour les grandes puissances.
- mais son poids international reste faible.

21.3. Afrique : des tentatives d'émancipation peu limitées

- les organisations politiques africaines : un bilan mitigé ; Analyser les politiques d'émancipation africaines.
- l'Afrique : terre de gouvernance mondiale en échec.

Thème 22. Le Maroc puissance régionale, en quête d'un rayonnement mondial

Identifier les atouts du Maroc, et analyser son positionnement régional et international.

22.1. Le Maroc : des potentialités nombreuses, et des opportunités prometteuses

- une position géographique unique ; Repérer et analyser les fondamentaux de la puissance marocaine.
- un pays stable et sûr ;
- d'énormes potentialités économiques et sociales.

22.2. Un positionnement régional et mondial en consolidation

- un capital relationnel diversifié ; Analyser la position du Maroc à l'échelle régionale et internationale.
- une diplomatie économique active ;
- une présence incontestable au sein du système de coopération internationale.

Thème 23. Géopolitique du PMO : décomposition et recomposition

Présenter la réalité géopolitique du PMO comme un espace de richesses et un foyer de conflits.

23.1. Un carrefour géographique et historique aux atouts nombreux

- les interactions entre hommes et milieux ; Repérer et analyser les atouts culturels, géographiques et sociaux du PMO.
- une aire culturelle nostalgique de son passé brillant ;
- des États et des sociétés diversifiés.

23.2. Une entrée accélérée dans la mondialisation

- les économies du Golfe arabo-persique : le choix de la rente pétrolière ; Apprécier les facteurs d'insertion du PMO dans la mondialisation.
- des économies émergentes et d'autres en crises.

23.3. Quel ordre régional ?

- un épice de la géopolitique mondiale ; Situer le PMO dans son atmosphère régional et mondial.
- pMO : « le bal des puissances »

- le Moyen-Orient : vers une région proactive.

Thème 24. Asie orientale et pacifique (AOP) dans la mondialisation : géopolitique d'une région convoitée et multipolaire

Appréhender les réalités économiques et géopolitiques de l'AOP comme étant une région attractive et multipolaire.

24.1. AOP, un espace géostratégique

- l'AOP, premier foyer mondial de peuplement ; Caractériser l'Asie orientale et Pacifique.
- une diversité géographique et culturelle ;
- états et sociétés : le poids du passé.

24.2. AOP : des espaces mondialisés et mondialisateurs

- l'AOP : nouveau centre de gravité de l'économie mondiale ; Analyser comment l'Asie orientale et pacifique s'insère dans la mondialisation.
- une double intégration régionale et mondiale ;
- l'AOP : espace contrasté.

24.3. AOP : un espace en pleine reconfigurations géopolitiques

- les espaces maritimes, un enjeu croissant ; Analyser la configuration géopolitique de l'Asie orientale et pacifique.
- de multiples frictions entre les puissances régionales ;
- une nouvelle course vers l'armement : nouveau centre de conflits ?

Thème 25. Chine et Inde : puissance mondiale ou émergence régionale

Comparer les attributs de la puissance et les réalités géopolitiques de la Chine et de l'Inde.

25.1. Chine et Inde : de l'essor économique à la montée en puissance

- deux puissances économiques émergentes ; Comparer les atouts de la puissance chinoise et indienne.
- deux puissances militaires de premier plan ; Deux soft power en consolidation.

25.2. Géopolitique de la Chine et de l'Inde : des ambitions régionales et mondiales

- la Chine et l'Inde dans leur voisinage régional ; Comparer la capacité de projection chinoise et indienne.
- la Chine et l'Inde dans le monde.

25.3. Chine et Inde : deux puissances au défi de leur faiblesses

- la Chine : un colosse aux pieds d'argile ; Comparer et analyser les défis de la puissance chinoise et indienne.
- l'Inde : une puissance singulière.

Recommandations et Précisions

Recommandations

Références bibliographiques

Thème 19. Afrique : états, territoires, cultures et sociétés

- l'Afrique est un continent riche connu par la multiplicité des ressources naturelles, la diversité des peuples et des cultures, et des disparités régionales ;
- l'étude de l'histoire de l'Afrique devrait être mise dans une perspective
- ◆ *Vision d'une Afrique Nouvelle au XXI^e siècle.* ; Olanguena Awono, Urbain ; Éditeur : l'Harmattan ; 2023 ;
- ◆ *Géopolitique des mondes arabes : 40 fiches illustrées pour comprendre le monde Ed. 2.* Auteur : Billion, Didier ; Éditeur : Eyrolles ; 2021
- ◆ *ECG 2 – Histoire Géographie Géopolitique du monde contemporain – Programmes 2022 ; Tout-en-un.* Yan-

géopolitique ; il n'est pas demandé de détailler le processus historique de la colonisation de l'Afrique.

nick Clavé, Edouard de Bélizal, Maie Gérardot, Thomas Merle ; Parution : août 2022 ; Collection : j'intègre ; Marque : dunod

- ◆ *Tout comprendre à la géopolitique 1200 concepts pour réussir vos concours et examens.* Anne Battistoni-Lemière ; Collection : HORS COLLECTION ; Marque : armand Colin ; 2022
- ◆ *Géopolitique de l'Afrique : 40 fiches illustrées pour comprendre le monde.* collection dirigée par Pascal Boniface Ed. 1 ; Servant, Jean-Christophe, Hugon, Philippe ; Eyrolles ; 2020

Thème 20. Développement de l'Afrique : politiques et enjeux

- limiter les défis du XXIème siècle à ceux : sociaux, géographiques, économiques, politiques et géopolitiques ;
- prévoir des études de cas sur le miracle rwandais, l'Afrique du Sud, les lions africains, pour démontrer les économies en mutation en Afrique.
- ◆ *Et si l'Afrique refusait le développement ?.* Axelle Kabou, l'Harmattan 1991,208 p ;
- ◆ *Comment l'Afrique en est arrivée là»* Axelle Kabou. 2011
- ◆ *Géopolitique de l'Afrique : du continent noir oublié à la renaissance africaine.* Éric Nguyen 2017 ;
- ◆ *Extirper l'Afrique du non-développement.* Auteur : diouf, Makhtar ; Editeur : l'Harmattan ; 2023 ;
- ◆ *Relations internationales 2023-2024 – Cours et QCM.* Auteur : beauchesne, Bénédicte Cavallé, Jean-Philippe ; Editeur : ellipses ; 2022
- ◆ *ECG 2 – Histoire Géographie Géopolitique du monde contemporain – Programmes 2022, Tout-en-un.* Yannick Clavé, Edouard de Bélizal, Maie Gérardot, Thomas Merle ; Parution : août 2022 ; Collection : j'intègre ; Marque : dunod
- ◆ *Géopolitique de l'Afrique : 40 fiches illustrées pour comprendre le monde.* collection dirigée par pascal boniface Ed. 1 ; Servant, Jean-Christophe, Hugon, Philippe ; Eyrolles ; 2020

Thème 21. Géopolitique du continent africain : ingérence, coopération et dépendance

Les défis du 21^{ème} siècle sont : sociaux, démographiques, sécuritaires, économiques et politiques.

- ◆ *Et si »Vision d'une Afrique Nouvelle au XXIe siècle.* Olan-guena Awono, Urbain ; Editeur : l'Harmattan ; 2023 ;
- ◆ *ECG 2 – Histoire Géographie Géopolitique du monde contemporain – Programmes 2022 ; Tout-en-un.* Yannick Clavé, Edouard de Bélizal, Maie Gérardot, Thomas Merle ; Parution : août 2022 ; Collection : j'intègre ; Marque : dunod
- ◆ *Tout comprendre à la géopolitique 1200 concepts pour réussir vos concours et examens ; Anne Battistoni-Lemière.* Collection : HORS COLLECTION ; Marque : armand Colin ; 2022
- ◆ *Géopolitique de l'Afrique : 40 fiches illustrées pour comprendre le monde.* collection dirigée par pascal boniface Ed. 1 ; Servant, Jean-Christophe, Hugon, Philippe ; Eyrolles ; 2020

Thème 22. Le Maroc puissance régionale, en quête d'un rayonnement mondial

- mettre l'accent sur le conflit du Sahara comme un pivot déterminant de
- ◆ *Histoire du Maroc.* Ed. 2 ; Luga, Bernard ; Editeur : ellipses ; 2023

- la politique étrangère marocaine ;
- mettre en valeur la nouvelle politique d'ascension mise en œuvre par le Maroc depuis 1999.

- ◆ *1999 – 2020 Le Maroc en Afrique : diplomatie, Sécurité & Développement*. Auteur : policy Center for the New South, Madani, Amine Harastani ; Editeur : policy Center for the New South ; 2020
- ◆ *Capital humain et développement économique et social au Maroc*. Auteur : policy Center for the New South ; Editeur : policy Center for the New South ; 2022
- ◆ *Le temps du Maroc : 2020-2021 résilience et émergence du royaume chérifien, Ed.2*. auteur : alaoui, Abdelmalek ; Editeur : la Croisée des Chemins ; 2021
- ◆ *Géopolitique et géoéconomie marocaines en Afrique*. Auteur(s) : harakat, Mohamed ; Editeur : l'Harmattan ; 2022

Thème 23. Géopolitique du PMO : décomposition et recomposition

- intégrer l'Égypte, l'Afghanistan dans la définition du PMO ;
- mettre l'accent sur les trois blocs économiques du PMO : les économies pétrolières (Arabie Saoudite, Qatar...), des économies émergentes (Turquie), et des économies en crise (Yémen, Afghanistan, Syrie)
- ◆ *Histoire du Moyen-Orient : du XIXe siècle à nos jours Ed. 2*. Dupont, Anne-Laure, Mayeur-Jaouen, Catherine, Verdeil, Chantal ; Editeur : armand Colin ; 2023
- ◆ *Relations internationales 2023-2024 – Cours et QCM*. Auteur : beauchesne, Bénédicte Cavaillé, Jean-Philippe ; Editeur : ellipses ; 2022
- ◆ *Géopolitique des mondes arabes : 40 fiches illustrées pour comprendre le monde Ed. 2*. Auteur : billion, Didier ; Editeur : eyrolles ; 2021
- ◆ *ECG 2 – Histoire Géographie Géopolitique du monde contemporain – Programmes 2022 ; Tout-en-un*. Yannick Clavé, Edouard de Bélizal, Maie Gérardot, Thomas Merle ; Parution : août 2022 ; Collection : j'intègre ; Marque : du nod
- ◆ *Le désordre éthique mondial : lecture géopolitique du Proche-Orient*. Auteur : maalouf, Joseph ; Editeur : l'Harmattan ; 2022

Thème 24. L'Asie orientale et pacifique (AOP) dans la mondialisation : géopolitique d'une région multipolaire et convoitée

- l'Asie orientale et pacifique = extrême Orient (ou l'Asie de l'Est) + L'Océanie
- mettre l'accent sur le rôle des puissances mondiales externes dans l'alimentation des différents entre les acteurs régionaux en AOP.
- ◆ *Géopolitique des mondes asiatiques : 40 fiches illustrées pour comprendre le monde*. Collection dirigée par Pascal Boniface Ed. 1 ; Auteur : courmont, Barthélémy ; Editeur : eyrolles ; 2023
- ◆ *Relations internationales 2023-2024 – Cours et QCM*. Auteur : beauchesne, Bénédicte Cavaillé, Jean-Philippe ; Editeur : ellipses ; 2022
- ◆ *ECG 2 – Histoire Géographie Géopolitique du monde contemporain – Programmes 2022 ; Tout-en-un*. Yannick Clavé, Edouard de Bélizal, Maie Gérardot, Thomas Merle ; Parution : août 2022 ; Collection : j'intègre ; Marque : du nod
- ◆ *Tout comprendre à la géopolitique 1200 concepts pour réussir vos concours et examens*. Anne Battistoni-Lemière ; Collection : HORS COLLECTION ; Marque : armand Colin ; 2022
- ◆ *Géopolitique de l'Indopacifique : enjeux internationaux, perspectives françaises*. Milhiet, Paco ; Le Cavalier Bleu

éditions ; 2022

- ◆ *Géopolitique des mondes asiatiques : 40 fiches illustrées pour comprendre le monde.* – Collection dirigée par Pascal Boniface Ed. 1 ; Courmont, Barthélémy ; Eyrolles ; 2023

Thème 25. Chine et Inde : puissance mondiale ou émergence régionale

- mettre l'accent sur :
 - l'atout de l'immensité des chiffres : territoire, ressources, rôle de l'armée, l'atout du diaspora... ;
 - une croissance vertigineuse : modernisation de l'agriculture, l'usine du monde, le bureau du monde, essor financier colossal ;
 - les mutations sociales : amélioration du niveau de vie, montée des inégalités ;
 - les défis de la Chine et de l'Inde : démographique, environnemental, urbain, et économique.
- ◆ *Géopolitique Mondiale : théorie générale et géopolitique de la Russie, la Chine, l'Inde et du monde Musulman.*, Tshiyembe, Mwayila, Editeur : l'Harmattan ; 2023
- ◆ *Géopolitique des mondes asiatiques : 40 fiches illustrées pour comprendre le monde.* Collection dirigée par Pascal Boniface Ed. 1 ; Auteur : courmont, Barthélémy ; Editeur : eyrolles ; 2023
- ◆ *Relations internationales 2023-2024 – Cours et QCM.* Auteur : beauchesne, Bénédicte Cavaille, Jean-Philippe ; Editeur : ellipses ; 2022
- ◆ *ECG 2 – Histoire Géographie Géopolitique du monde contemporain – Programmes 2022, Tout-en-un.* Yannick Clavé, Edouard de Bélizal, Maie Gérardot, Thomas Merle ; Parution : août 2022 ; Collection : j'intègre ; Marque : du-nod

Culture Arabe et Traduction

النشاط	نوعها	الحصة
Mondialisation, langues et cultures		
Les derniers hommes, Achille Mbembé	تعريب	1
رسالة الأدب العربي، عبد الله كنون	تعجيم	2
La langue arabe, la Rolls et la Volkswagen, William, W. Saïd	تعريب	3
اللغة العربية والنشاط الاقتصادي، سعيد أحمد بيومي	تعجيم	4
يختار الأستاذ الموضوع تماشيا مع محاور المقرر.	تعبير كتابي	5
فرض محروس	فرض	6
تصحيح الفرض	فرض	7
Roland Barthes Ce que je dois à Khatibi	تعريب	8
مثل صيف لن يتكرر، محمد برادة	تعجيم	9
L'Allemagne et la crise grecque, François	تعريب	10
الحَيِّ السوري نيويورك، ربيع جابر	تعجيم	11
يختار الأستاذ الموضوع تماشيا مع محاور المقرر	تعبير كتابي	12
فرض محروس	فرض	13
تصحيح الفرض المحروس	فرض	14
Économies et mouvements de société		
الفقر يجتاح العالم العربي، أحمد وهدان	تعجيم	1
Le néolibéralisme	تعريب	2
رماد الحياة، حسونة المصباحي	تعجيم	3
يختار الأستاذ الموضوع تماشيا مع محاور المقرر	تعبير كتابي	4
فرض محروس	فرض	5
تصحيح الفرض	فرض	6
Les revendications féminines dans le monde	تعريب	7
الخدمة، يوسف فاضل	تعجيم	8
CNAEM : méthodologie et exercices		9
يختار الأستاذ الموضوع تماشيا مع محاور المقرر	تعبير كتابي	10
Épreuve CNAEM	فرض	11
تصحيح الفرض	فرض	12

REFLECTURE

Français

Commun aux deuxièmes années des filières économiques et commerciales des Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles (ECS et ECT), l'enseignement du Français-culture générale constitue un moyen privilégié de la formation générale des élèves. Il porte principalement sur le traitement d'un thème de culture générale, renouvelé chaque année, à travers un corpus de textes littéraires et/ou philosophiques.

Par ailleurs, il est à rappeler qu'au cours de la première année des CPGE économiques et commerciales (ECT et ECS), la priorité a été accordée au renforcement des compétences linguistiques et aux apprentissages d'ordre méthodologique portant sur les exercices de résumé de texte et de dissertation, auxquels les élèves ont été initiés dans le cadre d'une progression raisonnée.

1 Les objectifs de la formation

La formation s'articule autour de la réalisation de trois objectifs majeurs : culturel, méthodologique et communicationnel :

1.1 Objectif culturel

- ◆ Élargir et approfondir la culture générale des élèves et enrichir leurs connaissances littéraires et philosophiques autour de certaines thématiques données ;
- ◆ amener les élèves à confronter sur des thématiques données des points de vue diversifiés et à en tirer profit pour leur formation personnelle ;
- ◆ développer le sens critique et la réflexion personnelle éclairée par des références universelles qui permettent de mieux comprendre le monde qui nous entoure.

1.2 Objectif méthodologique

- ◆ Renforcer l'aptitude au travail autonome et à l'autogestion et développer les capacités méthodologiques nécessaires pour passer les épreuves écrites et orales des différents concours : analyse, synthèse résumé, confrontation, problématisation, argumentation, illustration, dissertation, entretien, etc ;
- ◆ renforcer la capacité de compréhension et de reformulation chez les élèves, les conduire à identifier diverses stratégies de communication, à hiérarchiser des informations d'origines variées dans une présentation structurée, et leur apprendre à apprécier et à produire une argumentation ;
- ◆ développer les aptitudes des élèves à comprendre et à formuler une problématique, à élaborer des réponses structurées en mobilisant leur connaissance des œuvres et des savoir-faire appropriés.

1.3 Objectif communicationnels

Consolider les compétences d'expression écrite et orale ainsi que l'aptitude à la communication orale dans différentes situations, compétences indispensables pour passer les épreuves des concours et pour réussir l'insertion future dans la vie professionnelle.

2 Composantes du programme et savoir-faire visés

Le programme de français-culture générale de la deuxième année des CPGE économiques et commerciales vise un approfondissement des savoirs et des savoir-faire acquis en première année. Il est constitué de trois composantes complémentaires.

2.1 La culture générale

Le programme de culture générale de la deuxième année ECT et ECS est articulé autour d'un thème renouvelé chaque année. Par exemple, pour la session 2022, le thème retenu était «l'animal» ; pour 2023, «le monde», pour 2024, «la violence» et pour 2025, le thème est «l'image». L'étude du thème de l'année est principalement orientée vers la préparation de l'épreuve de «dissertation de culture générale», exercice proposé dans les concours d'accès aux grandes écoles de commerce et de management au Maroc et à l'étranger. Cette étude vise à fournir aux élèves le vocabulaire, les idées et les exemples nécessaires pour étayer leur réflexion personnelle sur le thème et développer leur argumentation. L'exploration méthodique du thème se réalise à travers une progression annuelle élaborée au début de l'année par chaque professeur. Cohérente et progressive, cette progression est constituée de six séquences au moins, articulées chacune autour d'une problématique dérivée du thème de l'année. Chaque problématique traitée devrait permettre d'explorer un ou plusieurs aspects du thème sur les plans philosophique et littéraire, comme elle peut ouvrir le champ de l'étude vers d'autres domaines de la culture générale : l'art, les sciences humaines, etc. Le traitement de chaque problématique repose principalement sur l'analyse comparative de groupements de textes, l'étude de textes consistants (chapitres par exemples) ou d'une œuvre intégrale. Pour plus de cohérence, le professeur mettra à profit les séances consacrées au résumé et à la synthèse de textes pour proposer des extraits pertinents qui éclairent, approfondissent ou prolongent son étude du thème de l'année et du vocabulaire thématique.

2.2 La méthodologie

C'est la deuxième composante du programme. Elle vise principalement la maîtrise de la méthodologie des exercices proposés aux concours d'entrée aux grandes écoles de commerce au Maroc et à l'étranger, à savoir le résumé de texte, la dissertation et la synthèse de textes.

Le résumé de texte

L'initiation à cet exercice ayant été faite en première année, l'objectif en deuxième est d'approfondir le savoir-faire déjà acquis à travers le développement des capacités suivantes :

- ◆ analyser des textes argumentatifs de longueur croissante (de 1500 à 4000 mots), et de difficulté progressive (au regard de la complexité du raisonnement et du degré d'abstraction) ;
- ◆ identifier la thèse d'un texte et reconnaître la stratégie argumentative adoptée par l'auteur ;
- ◆ reconstituer, en un temps limité, le circuit argumentatif d'un texte argumentatif long et le présenter sous forme de plan avec des parties et des sous-parties ;
- ◆ réécrire d'une manière claire, et dans un style personnel, l'essentiel d'un raisonnement abstrait, en conservant la structure, la tonalité et le mode d'énonciation du texte de départ ; conserver, lors de la rédaction, l'équilibre d'ensemble des différentes unités de sens qui composent un texte et les étapes du raisonnement qui le sous-tendent ;

- ◆ reformuler d'une manière synthétique un exemple, un récit, une description ou une citation à valeur argumentative ;
- ◆ respecter le nombre de mots prescrit par la consigne ;
- ◆ résumer des textes de longueurs variées (de 1500 à 4000 mots) en un temps limité ;
- ◆ toute autre compétence jugée utile par le professeur.

La dissertation

Lors de la deuxième année, l'élève consolide sa capacité à rédiger une dissertation intégrale de culture générale, selon les normes des différents concours. Pour cela, il devra renforcer les capacités suivantes, déjà acquises en première année :

- ◆ comprendre sans difficulté un sujet de dissertation (en analysant les termes et leurs relations, les présupposés et les limites) ;
- ◆ faire le bilan de l'analyse du sujet en le reformulant d'une manière claire et concise.
- ◆ problématiser un sujet de dissertation et formuler une problématique précise en vue de le traiter ;
- ◆ mobiliser les éléments de culture générale (littérature, philosophie, sciences humaines, arts, etc.) nécessaires pour alimenter son argumentation ;
- ◆ regrouper et hiérarchiser des idées en vue d'élaborer un raisonnement structuré et progressif en réponse à la problématique retenue ;
- ◆ construire un plan détaillé de la dissertation avec des parties, des sous-parties et des exemples ;
- ◆ rédiger, en s'appuyant sur un plan détaillé, une dissertation intégrale de culture générale comportant une introduction, un développement constitué de plusieurs paragraphes argumentatifs agencés, des transitions et une conclusion ;
- ◆ toute autre compétence jugée utile par le professeur.

La synthèse de textes

Bien que cet exercice ne soit pas très présent dans les concours d'entrée aux écoles de commerce, le professeur veillera quand-même à le pratiquer avec ses élèves quand il le juge nécessaire. Il est à signaler que cet exercice présente surtout un intérêt pédagogique puisqu'il permet de traiter méthodiquement des groupements de textes sur une thématique donnée.

2.3 La communication orale

Cette composante prépare les élèves à passer les épreuves orales des concours d'entrée aux écoles de commerce dans les meilleures conditions. Le développement de la communication orale chez les élèves de la deuxième année s'articule autour des capacités suivantes :

- ◆ écouter activement autrui afin de comprendre son message et réagir d'une manière appropriée en liant ses interventions à celles de ses interlocuteurs ;
- ◆ exposer ses idées et ses opinions et argumenter avec conviction sur des sujets complexes en apportant des explications appropriées, des arguments et des commentaires ;
- ◆ développer méthodiquement une argumentation en mettant en évidence les points significatifs et les éléments pertinents ;
- ◆ développer une argumentation claire, en élargissant et confirmant ses points de vue par des arguments secondaires et des exemples pertinents ;
- ◆ faire un exposé clair en avançant des raisons pour ou contre un point de vue particulier et en présentant les avantages et les inconvénients d'options diverses. Prendre en charge une série de questions, après l'exposé, avec un degré d'aisance et de spontanéité qui ne cause pas de

tension à l'auditoire ou à lui/elle-même ;

- ◆ présenter un sujet complexe, bien construit, avec assurance à un auditoire en structurant et adaptant l'exposé avec souplesse, pour répondre aux besoins de cet auditoire. Gérer un questionnement difficile, voire hostile ;
- ◆ soutenir un débat, même sur des sujets abstraits, complexes et non familiers. Argumenter une prise de position de manière convaincante en répondant aux questions et commentaires ainsi qu'aux contre-arguments avec aisance, spontanéité et pertinence.

Comme on peut le constater, les composantes du programme de français-culture générale en classes préparatoires économiques et commerciales présentent une cohérence et une complémentarité. En effet, chaque séquence d'enseignement comporte des activités qui intègrent harmonieusement les objectifs des trois composantes : le développement des compétences méthodologiques s'appuie sur un contenu culturel et mobilise l'aptitude à la communication.

Anglais

1 Introductory Statement

Introductory Statement This document serves as a continuation of the first-year general guidelines. Its primary goal is to establish a standardized pedagogical framework aimed at promoting a coherent and unified approach to the teaching of English as a foreign language across Moroccan CPGE (Classes Préparatoires aux Grandes Écoles). The second-year classes teachers are encouraged to implement the teaching guidelines and practices outlined herein, beginning with the 2025-2026 academic year.

Constructive feedback, suggestions, and recommendations regarding any aspect of this document are welcome and should be directed to the National Coordination of English for CPGE or to Inspector/Coordinator of the English department at noubendouqi@gmail.com. All submissions will be reviewed and given appropriate consideration in future updates.

Students pursuing their studies in the second-year preparatory classes- in scientific, technological and management streams- are supposed to have acquired the core thematic, cognitive and linguistic contents and skills as stipulated in the syllabus of the first year. Therefore, teachers are expected to build on those assets and provide their students with the appropriate teaching resources along the second-year prescribed guidelines.

2 Goals and aims

Here is a reminder of the goals and aims of teaching English in the CPGE:

- ◆ to enable the learners to enhance their linguistic and communicative competencies in the four areas of the English language system;
- ◆ to promote the learners' awareness of their cultural identity and further their understanding of cross-cultural differences;
- ◆ to develop critical thinking and responsible citizenship in students;
- ◆ to help students analyze different viewpoints in scientific, technological and business texts;
- ◆ to help the learners develop their autonomy and independence and enable them to interact effectively and appropriately with the different environment;
- ◆ to equip learners with basic academic and study skills that enable them to successfully meet the demands of higher education and adapt to the evolving requirements of the job market.

3 Specific Performance Objectives - Second Year Level

The following objectives are intended to serve as reference points for teachers as they plan, organize, and implement classroom instruction and learning activities. They reflect the thematic, cognitive, linguistic, and interpersonal goals expected at this advanced stage of preparatory studies:

1. to enhance learners' rhetorical competence in English, with a focus on understanding the structural features of academic discourse and fostering both cross-linguistic and pragmatic awareness through comparative and contextualized practice;

2. to broaden learners' understanding of sustainable and human development, by introducing them to diverse models of effective leadership, governance, and resource management within a globalized context;
3. to consolidate and extend previously acquired linguistic and cultural competencies, ensuring that foundational knowledge is revisited, strengthened, and integrated into new learning contexts;
4. to cultivate a collaborative learning environment, encouraging students to engage in teamwork, cooperative inquiry, and reflective dialogue, while developing critical perspectives on the content and issues discussed;
5. to refine learners' test-taking strategies across the key language skills of reading, writing, and translation, with an emphasis on analytical reasoning and time management;
6. to familiarize students with a variety of academic test formats, enhancing their ability to interpret task instructions accurately and respond effectively under exam conditions.

4 Assessment and Evaluation

Assessment is an integral part of the learning and teaching process. It helps students to understand what they can do with English and what areas of the language they need to improve because of the backwash effect it offers for both students and teachers. "The Race to the Top (RTTT) Assessment" policy adopted in the CPGE has however imposed new roles on both teachers and students in order to maximise learning and at the same time abide by the principles of reliability, validity and fairness. In CPGE, students are tested at regular intervals to gauge their progress towards the set standards bearing in mind the administrative calendar. Throughout the whole year teachers generally administer two types of tests, namely written tests "Devoirs Surveillés" (DS) and oral ones (Colles). (c.f. Term assessment specifications grid), together with a number of quizzes of different types. Students are also assessed by submitting a specific number of "Devoirs Libres" (DL). In the English department, they are referred to as independent work. CPGE students need also to be well-prepared for rigorous national and international examinations to gain admission to prestigious institutions. This preparation requires the coverage of all the course components, be they thematic, cognitive or linguistic.

At the cognitive level, students need to develop effective study skills, time management strategies, and test-taking techniques. Regular practice through mock exams and standardized test preparation materials can help students become familiar with the exam format and help them reduce anxiety. Additionally, understanding the specific requirements and expectations of each examination, whether it is the TOEIC, SAT, TOEFL, or other entrance exams, allows students to tailor their study plans accordingly. Comprehensive preparation therefore ensures that students not only meet but exceed the academic standards required by top-tier institutions. This strategic approach to exam readiness enhances their chances of securing admission and scholarships to renowned universities in Morocco and abroad.

5 Thematic contents – SECOND YEAR

The main theme and the selected sub-themes for the 2025-2026 academic years are scheduled as follows:

Main theme	The business environment in a Digitized world	Knowledge management & Social entrepreneurship
Subthemes	Digitization & Jobs of the future	Knowledge management & Social entrepreneurship

		Social entrepreneurship & technology in the digital economy
Theme-related expected learning outcome	<p>Students are sensitized to the digitalization process around the globe.</p> <p>Students demonstrate sensitivity towards the impact of the internet on future jobs.</p>	<p>Generating wealth depends on true involvement in local & international trade and an understanding of finance issues in a digitized world</p> <p>To create wealth in a dynamic society requires coping with technological progress in local and global environments.</p>
Statement of Inquiry	<p>A mindset of an IT literate promotes a healthy integration in global business environments.</p> <p>Abundant job opportunities around the globe nowadays is a result of strong economies, skilled people with creative ideas, and appropriate professional environments.</p>	<p>Creating wealth & prosperity is a result of awareness of finance issues around the globe</p> <p>A recognition of the intersections between culture, communication, technology & business are key to successful social entrepreneurship.</p>
Suggested Topics.	<p>Smart cities & technological development.</p> <p>The new industrial revolution & the Internet of Things.</p> <p>Future Jobs in the digital world.</p>	<p>International Trade and cashless societies.</p> <p>Local businesses and Start-ups.</p> <p>Data Management Vs knowledge management.</p> <p>Social & emotional intelligence.</p>

Revisiting/Recycling main themes & skills for the standardized tests & preparation for the national & International tests. % . This justifies the grade the student gets in term 6.

5.1 Independent Project

The project to be conducted by students individually under one of the main themes:

- going digital in a multilateral world: digital mind, digital life and digital business;
- s recognition of the intersections between culture, communication, technology & business are key to successful social entrepreneurship.

The business environment in a Digitized world Knowledge management entrepreneurship & Social

Progress & development

- ▶ Culture & identity;
- ▶ Human values and Global citizenship;
- ▶ Communication & cooperation;
- ▶ Art and technology.

6 Cognitive contents and skills SECOND YEAR

As part of our commitment to building lifelong learners and independent thinkers, this year's focus for second-year students includes a structured development of essential cognitive skills and strategies as a further development of the first year's program. These contents aim to foster students' ability to research effectively, prepare for and approach assessments with confidence, and engage in thoughtful, critical thinking across disciplines.

This program is designed to support students in becoming more autonomous, reflective, and strategic in their learning and teachers in integrating cognitive skill-building into their classroom instruction in meaningful and transferable ways.

The modules are grouped into three main categories:

- **Study Skills & Research:** developing techniques to search for information online, assess source credibility, and carry out structured research tasks.
- **Reviewing & Test-Taking:** building practical strategies to prepare for different types of tests, read assessment tasks critically, and take purposeful notes.
- **Critical Thinking:** encouraging students to explore different perspectives, question assumptions, analyze reasoning, and develop informed opinions.

Together, these sets of skills provide a strong foundation for academic success and are aligned with 21st-century learning expectations. We invite both students and teachers to approach these contents not just as tasks to complete, but as tools for thinking, questioning, and growing.

7 Linguistic skills_ SECOND YEAR

As part of the CPGE requirements, and in order to help the candidates be better prepared for the academic and professional requirements, the Second Year Linguistic Skills program is designed to equip students in the Classes Préparatoires aux Grandes Écoles (CPGE) with the advanced tools they need to succeed in both competitive exams and higher education contexts, where analytical communication and language precision are critical.

Second year's program emphasizes a comprehensive, skills-based approach to English language learning, focusing on critical reading, visual and auditory comprehension, oral communication, and writing. It goes beyond basic fluency to develop meta-linguistic awareness and strategic competence in both academic and real-world scenarios.

Specifically, the linguistic contents and skills should enable students to:

- analyze texts with depth and accuracy;
- listen actively and interpret complex visual and auditory messages;
- speak clearly, fluently, and persuasively in academic or professional settings;
- write effectively, using logical structure, argumentation, and coherence.

The skills outlined are not isolated competencies, but interconnected dimensions of language mastery that enhance critical thinking, argument construction, and cross-cultural communication. Whether preparing for oral examinations, written tasks, or academic debates, students are encouraged to engage with language as a tool for inquiry, analysis, and expression.

Teachers are invited to guide learners not just toward performance, but toward language empowerment, where students develop ownership of their expression and voice in English. Language is therefore viewed not only as a subject to study, but as a means to think, reason, and connect. Please find below a more detailed organisation of these contents and skills.

7.1 Critical Reading Subskills

To meet the demanding cognitive and linguistic expectations of national and international examinations, second-year CPGE students are required to cultivate advanced language skills across multiple domains. The following subskills are designed not only to enhance learners' comprehension and analytical abilities but also to equip them with practical strategies for tackling complex tasks in academic and assessment contexts.

Idea Analysis:

- ◆ Comparing and contrasting text information;
- ◆ recognize logical fallacies;
- ◆ identify the writer's attitude or bias; identify the mood or the tone of the writer.

Critique Content and Textual Elements

- ◆ Understand the macrostructure of texts and quickly extract relevant information;
- ◆ analyze texts to recognize explain text organizational pattern (classifying, cause and effect, sequencing, describing, etc.);
- ◆ recognize cohesive patterns;
- ◆ transcode information into tabular form (tables, graphs, diagrams, etc.);
- ◆ describe, interpret or represent information in a different way (e.g. Use graphs / diagrams or infer cause and consequence, etc.);
- ◆ paraphrase Ideas and Sentences.

Displaying Comprehension: evaluate Content and Textual Elements

- ◆ Summarize oral or written texts;
- ◆ evaluate, assess, make judgments and justify standpoints;
- ◆ synthesize, create new ideas, predict and draw conclusions.

7.2 Listening/Visual interpretation subskills

- ◆ Construct meaning from main ideas and supporting details, and draw conclusions from visual texts presented with spoken and/or written text;
- ◆ listen effectively & comprehend a lecture, an interview, a filmstrip, etc;
- ◆ interpret specific information, ideas, opinions and attitudes, presented in visual texts with spoken and/or written texts.

7.3 Speaking Subskills

- ◆ Speak appropriately and effectively and exchange opinions or express feelings;
- ◆ use transitions to establish connectedness, signal movement from one idea to another, and to clarify relationships among ideas;
- ◆ respond fluently and accurately to oral or written. messages.

7.4 Writing

- ◆ Summarize a paragraph, a short text or a longer passage;
- ◆ make a clear argument; Avoid repetition and narrative;
- ◆ subdivide long sections;

- ◆ Provide evidence for claims; Provides rationale for paper;
- ◆ use the stages of writing, namely prewriting, drafting/composing, revising and editing avoids lengthy sentences; (Paragraph and essay).

8 Translation

Teaching translation hopes to support student mastery of the lexical repertoire of both English and French; their knowledge of the syntactic systems of both languages, cultural and sensitivity when using French or English at the discourse level. It also hopes to promote fidelity and fluency in using both languages.

As for the translation goals, the course hopes to help the students improve their analytical skills, focus on accuracy and style, improve vocabulary and grammar. The following table summarizes the expected learning outcome and the target translation strategies.

Targeted skill	Expected learning outcome	Target translation strategies
Understand context.	Analyze whether the text is technical, cultural, or literary before choosing a technique.	<ul style="list-style-type: none"> ● literal translation & calque introduce basic linguistic patterns; ● modulation and equivalence address cultural and emotional subtleties.
Balance fidelity and fluency.	Prioritize preserving the meaning and naturalness of the text over rigid adherence to the original words or structure.	Borrowing and equivalence, maintain authenticity while, ensuring readability.
Be aware of false friends.	Some borrowed or calqued words can lead to mistranslation due to differences in meaning (e.g., <i>actuellement</i> in French means "currently," not "actually").	Borrowing and literal translation highlight potential pitfalls, fostering critical thinking.
Cultural sensitivity.	Be mindful of cultural nuances that may influence the choice of technique.	Modulation, equivalence, and reduction emphasize adapting meaning to the audience.
Experiment & revise.	Translators often draft using one technique, then revise to ensure clarity and appropriateness in the target language.	Transposition and reduction encourage trying new approaches and refining through feedback.

9 Table of Specification for CNC and CNAEM

The Hierarchy of Cognitive Skills: from Knowledge Recall to Creative Synthesis.

9.1 The Hierarchy of Cognitive Skills: from Knowledge Recall to Creative Synthesis

Cognitive Level	Cognitive skills governing the cognitive level
(20%)	1 - Remember : knowledge: recall or retrieve previously learned information. 2 - Understand: comprehension: grasp the meaning of information, interpret, and explain ideas.
(20%)	3 - Application: use knowledge and concepts in new situations or contexts.
(20%)	4 - Analysis: break down information into components, examine relationships, & identify patterns.
(20%)	5 - Evaluation: make judgments based on criteria; assess the value or validity of ideas.
(20%)	6-Synthesis: generate new ideas, products, or interpretations.

Main Command Terms used

List, define, identify	recall, memorize.
Summarize, explain, describe.	infer, interpret
Demonstrate, use, illustrate.	apply, solve.
Analyze, compare, contrast.	differentiate, categorize.
Evaluate, assess, justify.	defend, discuss, critique.
Create, design, formulate.	compose, invent.

9.2 Educational Goals: aligning Content, Objectives, and Cognitive Levels

Content	Sub-Content Area	Area Learning
Critical Reading	Informational Texts.	<ul style="list-style-type: none"> Extract and summarize key information from an article. Break down information into components, examine relationships, & identify patterns. Evaluate the credibility of sources in an informational text.
	Descriptive	Identify the writer's attitude, mood, or tone in the text.
	Expository	Understand the macrostructure of texts and extract relevant information.
	Argumentative or Persuasive.	Use knowledge and concepts in new situations or contexts.
	Business & Technical Reports.	<ul style="list-style-type: none"> Is familiar with the structure, mechanics and format of a technical report; can detect the tone, purpose & key information in the report.
mmmentary	Literary Analysis.	<ul style="list-style-type: none"> Analyze and interpret symbolism in a given passage; identify themes and literary devices in a short story.
	Commenting on a	<ul style="list-style-type: none"> analyze and Interpret specific information, ideas, opinions

	quote or a picture	<ul style="list-style-type: none"> and attitudes, presented in visual texts; interpret specific information, ideas, opinions and attitudes, presented in written texts; make logical inferences & draw conclusions from visual texts: ability to understand and interpret the meaning of the quote or image considering underlying messages or themes; recognize and comment on the symbolic meaning conveyed by visual elements; make judgments based on criteria; assess the value or validity of ideas. Verifying the accuracy of information; considering Perspectives: demonstrate empathy by considering different interpretations or reactions; using an appropriate and respectful tone; tailor comments to the specific audience and platform.
Translation	Thème/ Version.	<ul style="list-style-type: none"> Display familiarity with translation tools; display sensitivity and awareness to the lexical and syntactic systems of both English and French; Transfer of cultural or functional content. ability to adapt the writing style to match the tone and style of the original text; ability to solve translation challenges, such as finding equivalent expressions, dealing with ambiguity, & addressing cultural gaps; preserve the author's voice/ intention in the translated text.
	Thème	<ul style="list-style-type: none"> Theme: creatively adapt the content while preserving the essence of the original; theme: display a deep understanding of the theme or topic being addressed in the composition.
Writing Skills	Argumentative Essay	<ul style="list-style-type: none"> construct logical and coherent arguments; provide evidence for claims and rationale for paper; formulate a clear and concise thesis statement that reflects the main argument; address opposing viewpoints to strengthen the overall argument and provide evidence and reasoning to refute counterarguments; persuasive: write a persuasive essay with a clear thesis statement and supporting evidence; persuasive: utilize persuasive language, rhetoric, and literary devices.
	Synthesis Essay	<ul style="list-style-type: none"> Source Integration: properly cite sources using the appropriate citation style; generate new ideas, products, or interpretations based on different sources; identifying Patterns: recognize patterns, themes, or commonalities across different sources; theme Development: establishing a central theme that connects the various sources; develop a clear thesis that synthesizes information from different sources; blending ideas from different sources into a cohesive and

Text Organisation

Grammar and Editing.

unified piece;

- ensure smooth **transitions** between different sources and ideas;
 - provide **original analysis** and interpretation of the synthesized information;
 - demonstrate a **deep understanding of the topic** beyond a mere summary of sources.
 - demonstrate proper use of **transitions & sentence structure**.
- Identify and correct errors in grammar and punctuation.

REFLECTURE

Économie-Droit

Programme de la deuxième année

Module 2.1. Financement de l'économie et développement économique au Maroc

Objectif général du Module : présenter les caractéristiques, les choix fondamentaux et les voies de financement de l'économie marocaine.

Volume horaire du Module : 20 heures

Capacités ciblées :

- ◆ rédiger un paragraphe argumentatif;
- ◆ analyser un document économique;
- ◆ interpréter des graphiques et statistiques économiques.

Thème 2.1.1. Voies de financement de l'économie marocaine

Financement direct

- définition;
- rôles des banques;
- création monétaire.

Financement indirect

- définition;
- les différents types de marchés (monétaire, financier, des change).

Présenter les voies de financement de l'économie.

Thème 2.1.2. Maroc : une économie en développement

Panorama de l'économie du Maroc

- l'analyse sectorielle de l'économie du Maroc;
- essoufflement du modèle de développement du Maroc.

Le nouveau modèle de développement

- le nouveau modèle de développement : une vision stratégique;
- les perspectives du nouveau modèle de développement.

Présenter les caractéristiques et les choix fondamentaux de l'économie marocaine en matière de développement économique.

Recommandations et Précisions :

- Thème 2.1.1.** Présenter les rôles des banques (gestion des moyens de paiement, création monétaire, transformation des échéances).
Présenter l'évolution des rôles et des places des banques dans l'économie marocaine.
Présenter les différents types de marchés (marché monétaire, marché financier, marché des changes).
Présenter également les autres formes de financement, notamment le capital-risque et le financement participatif.
Caractériser le financement de l'économie marocaine.
- Thème 2.1.2.** Mettre l'accent sur les stratégies sectorielles adoptées par le Maroc.
Mettre en évidence les raisons qui expliquent la transition vers le nouveau modèle de développement du Maroc.

Module 2.2. Obligations et contrats

Objectif général du Module : analyser la validité d'un contrat, les clauses contractuelles et les effets juridiques d'un contrat.

Volume horaire du Module : 10 heures

Capacités ciblées : analyser un contrat.

Thème 2.2.1. Obligations

- définition ;
 - classification ;
 - sources.
- Caractériser les obligations juridiques

Thème 2.2.2. Contrats

- définition ;
 - classifications ;
 - conditions de validité ;
 - clauses particulières ;
 - effets du contrat.
- Analyser les fondements juridiques des contrats

Module 2.3. Régulation publique dans une économie de marché

Objectif général du Module : appréhender le rôle de l'État dans la mise en œuvre des politiques économiques.

Volume horaire du Module : 20 heures

Capacités ciblées :

- ◆ rédiger un paragraphe argumentatif ;
- ◆ analyser un corpus de documents économiques.

Thème 2.3.1. Place et rôle de l'État dans l'économie

Les fonctions de l'État

- les fonctions de l'État (Musgrave).
 - les organes de l'action publique
- Apprécier la place et le rôle de l'État dans l'économie

Les moyens d'action de l'État

- budget de l'État;
- niveau et structure des dépenses publiques;
- niveau et structure des prélèvements obligatoires.

Apprécier la pertinence du moyen choisi en fonction de la conjoncture économique

Risques de l'action de l'État

- déficit public et dette publique;
- soutenabilité de la dette publique.

Analyser les risques inhérents à l'intervention de l'État.

Thème 2.3.2. Politiques économiques de l'État

Distinguer les différentes politiques économiques mises en œuvre par l'État.

Objectifs et typologie

- objectifs de la politique économique : croissance, plein-emploi, stabilité des prix, équilibre extérieur;
- typologies des politiques économiques : politiques conjoncturelles/ structurelles, politiques d'offre/de demande.

Saisir les objectifs et la typologie des politiques économiques.

Action sur l'offre et action sur la demande

- politique de demande : instruments de relance budgétaire, effets et limites (Keynes, Friedman, Laffer);
- politique d'offre : instruments, effets et limites (théories de la croissance endogène).

Apprécier l'efficacité des actions mises en œuvre dans le cadre de la politique économique.

Justifications et limites de l'intervention de l'État I. (Wagner, Keynes, approches libérales).

Présenter les limites des politiques économiques

Thème 2.3.3. Politique de redistribution face aux risques sociaux et aux inégalités sociales

Distinguer les différentes politiques économiques mises en œuvre par l'État.

Les inégalités sociales

- formes, origines et mesure;
- pauvreté : définitions et mesures;
- justification économique des inégalités et remise en cause de l'efficacité des inégalités.
- analyser les rôles de la politique de redistribution;
- présenter et analyser les différentes formes des inégalités sociales.

La redistribution

- objectif, formes et instruments;
- les modèles de protection sociale;
- le financement des politiques de redistribution.
- apprécier l'efficacité de la politique de redistribution dans la lutte contre les inégalités.

Module 2.4. Contrat de travail

Objectif général du Module : présenter et analyser le contrat de travail;

Volume horaire du Module : 10 heures

Capacités ciblées : résoudre un cas pratique lié à un contrat de travail.

Thème 2.4.1. Contrat de travail

La formation du contrat de travail

- les caractéristiques du contrat de travail ;
- les types de contrat de travail ;
- les clauses particulières du contrat de travail.

La rupture du contrat de travail

- la démission ;
- la rupture conventionnelle ;
- le licenciement : motifs et effets juridiques (documents et indemnités).
- présenter les caractéristiques juridiques du contrat de travail ;
- analyser la validité des clauses particulières du contrat de travail ;
- analyser les différents modes de rupture du contrat de travail.

Recommandations et Précisions :

- Thème 2.4.1.**
- le contrat de travail : distinguer entre le contrat de travail et le contrat d'entreprise ;
 - les principales clauses particulières à traiter : clause de mobilité, clause de confidentialité, clause d'invention ;
 - les calculs conduisant à la détermination des éléments de salaire ne sont pas envisageables dans ce chapitre.

Sciences de Management et Gestion

Organisation du programme

Le programme des Sciences de Gestion et Management est organisé en dix (10) modules. Six modules sont programmés en première année et quatre modules en deuxième année. Les modules sont accompagnés de volume horaire, de commentaires et précisions qui délimitent les champs d'études.

	1 ^{er} trimestre	2 ^{ème} trimestre	3 ^{ème} trimestre
1 ^{ère} année	Module 1.1. Système d'information comptable. Module 1.2. Connaissance de l'entreprise.	Module 1.3. Opérations comptables courantes. Module 1.4. Cadre stratégique de l'entreprise.	Module 1.5. Opérations comptables d'inventaire. Module 1.6. Production des états de synthèse.
2 ^{ème} année	Module 2.1 Analyse de la performance financière Module 2.2 Gestion des ressources humaines	Module 2.3 Analyse des coûts Module 2.4 Analyse du marché de l'entreprise	Révisions et entraînements Révisions et entraînements

Programme de la deuxième année

Module 2.1. Analyse de la performance financière

Objectif général du Module : Présenter les outils de l'analyse marketing.

Volume horaire du Module 12 heures

Capacités ciblées :

- établir un bilan fonctionnel simplifié ;
- calculer les indicateurs de l'équilibre financier (FDR, BFR et TN) ;
- calculer et interpréter des ratios d'équilibre financier et de rotation des éléments du BFR ;
- calculer le rentabilité économique et financière et identifier l'effet de levier financier ;
- rédiger une note d'analyse structurée.

Thème 2.1.1. Équilibre financier

- le bilan fonctionnel ;
 - analyse de l'équilibre.
- Analyser l'équilibre financier de l'entreprise

Thème 2.1.2. Rentabilité

- calcul de la rentabilité économique et financière ;
 - analyse de l'effet de levier financier.
- Analyser la rentabilité de l'entreprise

Commentaires et précisions :

- établissement du bilan fonctionnel à partir du bilan comptable sans retraitements ;
- reclassement des amortissements et provisions de l'actif immobilisé en ressources propres ;
- l'actif circulant et pris en valeurs nettes ;
- présenter et analyser l'équation de l'équilibre financier : $TN = FDR - BF$;
- calculer la rentabilité économique (REX/AE^1), la rentabilité financière (RN/RP^2) et identifier l'effet de levier financier sur un cas simple.

Module 2.2. Gestion des Ressources Humaines

Objectif général du Module : Présenter les domaines et les outils de la GRH.

Volume horaire du Module : 15 heures

Capacités ciblées :

- établir une matrice de prévision et d'analyse des emplois et des compétences.

Thème 2.2.1. Enjeux de la GRH

- définitions et mission ;
 - domaines de la GR.
- Définir et présenter les missions et domaines de la GRH.

1. $AE = Immobilisations brutes + BFR + Trésorerie de l'actif$

2. RP (Ressources propres) = Capitaux propres + Amortissements et provisions (pour dépréciation et PRC) durables

Thème 2.2.2. Outils GRH

- la gestion prévisionnelle des emplois et des compétences; Présenter les outils de la gestion prévisionnelle des emplois et des compétences.
- le système d'information RH.

Commentaires et précisions :

Établir les calculs nécessaires à la GPEC.

Module 2.3. Analyse des coûts

Objectif général du Module : Présenter les méthodes de calcul et d'analyse des coûts.

Volume horaire du Module : 12 heures

Capacités ciblées :

- établir un tableau de répartition des charges indirectes;
- établir un tableau de calcul des coûts unitaires d'inducteurs;
- calculer un coût;
- rédiger une note d'analyse.

Thème 2.3.1. Méthodes des coûts complets

- la méthode du coûts variable; Mettre en évidence l'utilité de la méthode du coût variable et du coût marginal.
- la méthode du coût margina.

Commentaires et précisions :

- ne faire ni la répartition primaire ni secondaire;
- présenter les calculs relatifs au tableau de répartition sur un cas simple sans stocks et avec un centre approvisionnement, un centre de production et un centre de distribution;
- ne pas traiter l'inventaire des stocks;
- comparer les coûts obtenus par la méthode des centres d'analyse et la méthode ABC;
- déterminer le seuil de rentabilité, le Point mort, la marge de sécurité et le Levier opérationnel;
- monter en quoi les différents coûts (coûts complets, coûts variable, coût marginal) peuvent constituer une base des décisions de gestion.

Module 2.4. Analyse du marché

Objectif général du Module : Présenter les outils d'analyse du marché de l'entreprise.

Volume horaire du Module : 15 heures

Capacités ciblées :

- segmenter la demande;
- apprécier la politique de produit de l'entreprise;
- apprécier les politiques de soutien du produit.

Thème 2.4.1. Analyse du marché de l'entreprise

- typologie et caractéristiques des marchés ; Identifier et utiliser les outils de connaissance et d'analyse du marché de l'entreprise.
- analyse de la demande et du comportement du client.

Thème 2.4.2. Action marketing et gestion de la relation clients

- le plan de marchéage; Apprécier la politique commerciale de l'entreprise
- la gestion de la relation client (GRC).

Commentaires et précisions :

- identifier les caractéristiques du marché au niveau de son offre, sa demande et ses caractéristiques globales;
- identifier les déterminants du comportement des clients;
- présenter les critères de segmentation de la clientèle;
- présenter la politique de produit et les politiques de son soutien (prix, communication et distribution);
- définir la GRC et mettre en évidence son importance dans le cadre du Marketing relationnel.