RELECTURE

Royaume du Maroc

Ministère de l'Education Nationale,
du Préscolaire et des Sports

Classes Préparatoires
aux Grandes Écoles

# Programmes de la deuxième année PSI

RELECTURE

# Avant-propos



L'éducation est un pilier essentiel du développement national. Considérée comme la clé de l'innovation et du progrès, elle joue un rôle stratégique dans la préparation des nouvelles générations aux défis du monde moderne. Dans notre système éducatif, les Classes Préparatoires aux Grandes Écoles (CPGE) occupent une place centrale : en dispensant une formation exigeante et rigoureuse, elles préparent les étudiants à accéder aux grandes écoles d'ingénieurs et de management, tout en favorisant leur insertion et leur contribution active au développement du pays.

Les nouveaux programmes des CPGE que nous présentons aujourd'hui sont en accord total avec la Vision Stratégique 2015-2030 et la Loi-Cadre 51-17, qui placent l'éducation au cœur des priorités nationales. Conçue pour renforcer l'excellence académique, cette nouvelle version des programmes a pour finalité la maîtrise approfondie des disciplines de spécialité tout en préparant les étudiants à un monde en perpétuelle mutation. Ainsi, les contenus et les méthodes pédagogiques ont été adaptés en fonction des défis scientifiques et technologiques du monde actuel.

Grâce à cette refonte des programmes, les CPGE accentuent la pertinence et la solidité de la formation dispensée dans les disciplines fondamentales dont la maîtrise représente un atout considérable pour la réussite dans des parcours académiques et professionnels de haut niveau. En plus du développement des compétences scientifiques et techniques, cette formation vise également à développer des aptitudes transversales essentielles, telles que la pensée critique, la créativité et le traitement de problèmes complexes, afin de mieux armer les étudiants face aux enjeux contemporains.

Ces programmes accordent aussi une importance particulière aux aspects humains et culturels de la formation dans la mesure où ils mettent l'accent sur l'ouverture d'esprit, la communication et le plurilinguisme, autant d'éléments clés pour préparer les étudiants à évoluer dans un environnement mondialisé. Cette ouverture leur permet d'élargir leur vision du monde, en même temps qu'elle cultive chez eux des valeurs typiques des citoyens résolus aux défis à l'échelle locale, nationale et internationale.

Une autre caractéristique mise en avant par cette refonte est l'initiation à la recherche scientifique qui occupe une place privilégiée dans le nouveau dispositif. Cette composante a pour rôle d'inciter les étudiants à adopter une attitude dynamique envers le progrès scientifique, les encourageant à jouer un rôle actif dans l'évolution de leurs domaines d'étude et de recherche. Cette dimension revêt une importance particulière dans un monde où la capacité à concevoir des solutions novatrices et à résoudre des problématiques complexes est un avantage déterminant.

Ces programmes ne se limitent donc pas à un simple parcours académique, ils incarnent une ambition éducative audacieuse visant à faire des jeunes d'aujourd'hui les leaders de demain. Ils constituent un véritable tremplin pour l'avenir, préparant les étudiants à contribuer activement à l'émergence et à la compétitivité du Maroc sur la scène internationale. En misant sur une formation alliant excellence académique, innovation et valeurs humaines, nous œuvrons à construire un pays où le progrès et la créativité vont de pair avec l'inclusion sociale et le développement durable.

**Mohamed Saad Berrada**

Ministre de l'Éducation Nationale,
du Préscolaire et des Sports

RELECTURE

# Table des matières

## Sciences industrielles pour l'ingénieur **111**



## Informatique **121**

PROGRAMME DE LA MATIÈRE

# Mathématiques



## 1 Préambule

### 1.1 Objectifs généraux de formation

L'enseignement des mathématiques dans la filière Physique et Sciences Industrielles (PSI) a pour vocation d'apporter les connaissances fondamentales et les savoir-faire indispensables à la formation générale des scientifiques, qu'ils soient ingénieurs, enseignants ou chercheurs ; il développe les aptitudes et les capacités des élèves selon les axes majeurs suivants :

- l'acquisition de connaissances et la maîtrise de techniques usuelles ;
- le développement simultané du sens de la rigueur et du goût du concret ;
- l'éveil de la curiosité intellectuelle et le développement de l'esprit critique, de recherche et de synthèse ;
- le développement de l'initiative, de l'autonomie et des capacités d'expression et de communication.

Son objectif est double. D'une part, il permet de développer des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques aux mathématiques. D'autre part, il contribue à fournir un langage, des représentations et des méthodes dont les autres disciplines scientifiques étudiées dans ces classes et au-delà, comme la physique, la chimie, l'informatique et les sciences industrielles, sont demandeuses ou utilisatrices.

Une formation mathématique de qualité doit développer non seulement la capacité à acquérir des connaissances et à les appliquer à des problèmes préalablement répertoriés, mais aussi l'aptitude à étudier des problèmes plus globaux ou des questions issues de situations réelles. Certaines situations nécessitent la conception d'outils nouveaux pour les traiter. Ainsi, la réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique constituent des objectifs majeurs.

Il est attendu que la pratique de la démarche et du raisonnement mathématique à travers les notions étudiées dans le cadre de ce programme concourt à la formation de l'esprit des élèves et le développement de leurs compétences : la rigueur du raisonnement, l'esprit critique, l'analyse et le contrôle des hypothèses et des résultats obtenus et leur pertinence au regard du problème posé, le sens de l'observation et celui de la déduction trouvent en mathématiques un champ d'action où ils seront cultivés de manière spécifique. Enfin, l'autonomie et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à exercer les élèves à mobiliser, de façon complémentaire et coordonnée, connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Pour aider les élèves à effectuer la synthèse des connaissances acquises dans les différents domaines qu'ils ont étudié, il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux élèves ; il est aussi souhaitable de mettre en lumière les interactions des champs de connaissance. La concertation entre les enseignants par classe, discipline ou cycle peut y contribuer efficacement ; la cohérence et une organisation coordonnée entre les diverses disciplines est fondamentale. Il importe d'éviter les redondances tout en soulignant les points communs, de limiter les divergences ou ambiguïtés dues à la diversité des points de vue possibles sur un même objet tout en enrichissant l'enseignement par cette même diversité.

Si les mathématiques sont un outil puissant de modélisation, que l'élève doit maîtriser, elles sont parfois plus contraignantes lorsqu'il s'agit d'en extraire une solution. L'évolution des techniques permet désormais d'utiliser aussi l'approche numérique afin de faire porter prioritairement l'attention des élèves sur l'interprétation et la discussion des résultats plutôt que sur une technique d'obtention. Cette approche permet en outre une modélisation plus fine du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires ou l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles. C'est aussi l'occasion pour l'élève d'exploiter les compétences acquises en informatique. C'est enfin l'opportunité de mener avec les professeurs d'informatique d'éventuelles démarches collaboratives.

Dans ce cadre, et vue la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation, les élèves doivent être entraînés à l'utilisation en mathématiques d'un logiciel de calcul scientifique et numérique pour la résolution de problèmes, la formulation de conjectures ou la représentation graphique de résultats. L'utilisation de ce logiciel, en libérant les élèves des aspects calculatoires ou techniques (calcul, dessin, représentation graphique), leur permet de se concentrer sur la démarche. Les concepts mathématiques sous-jacents sont mis en avant et l'interprétation des résultats obtenus est facilitée. L'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles devient possible.

Concernant les capacités d'expression et de communication, cela suppose, à l'écrit, la capacité à comprendre les énoncés mathématiques, à mettre au point un raisonnement et à rédiger une démonstration et, à l'oral, celle de présenter de manière claire et synthétique une démarche ou une production mathématique. Les travaux individuels ou en équipe proposés aux élèves en dehors du temps d'enseignement (devoirs libres, interrogations orales, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales, exposés) contribuent de manière efficace à développer ces compétences. La communication utilise des moyens diversifiés auxquels il convient de familiariser les élèves : cela concerne non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément essentiel, mais aussi les dispositifs de projection appropriés (rétroprojecteur, vidéoprojecteur) et l'outil informatique.

Il est aussi souhaitable que le contenu culturel des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques rendent compte des interactions entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, mettent en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique. Ils montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière. Dans ce sens, il pourra s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre problèmes et outils conceptuels ; les seconds sont développés pour résoudre les premiers mais deviennent à leur tour, et aux mains des mathématiciens, des objets d'étude qui posent de nouveaux problèmes et peuvent ultérieurement servir au traitement d'autres classes de problèmes.

On attachera une importance à l'aspect géométrique des notions et propriétés étudiées en ayant régulièrement recours à des figures et croquis, ce qui permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.



## 1.2 Organisation du texte du programme

Le programme de la classe de deuxième année PSI est présenté en deux grandes parties, chacune d'elles correspondant à une période. Chacune de ces parties définit un corpus de connaissances requises et de capacités attendues.

Le programme définit les objectifs de l'enseignement et décrit les connaissances et les capacités exigibles des élèves ; il précise aussi certains points de terminologie, certaines notations ainsi que des limites à respecter. à l'intérieur de chaque période, le programme est décliné en sections (numérotées 1, 2, …). Chaque section comporte un bandeau et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme et à droite les commentaires.

- le bandeau définit les objectifs essentiels et les capacités attendues des élèves, et délimite le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives. Il décrit parfois sommairement les notions qui y sont étudiées ;
- les contenus fixent les connaissances, les résultats et les méthodes figurant au programme ;
- les commentaires donnent des informations sur les capacités attendues des élèves. Ils indiquent des repères et proposent des notations. Ils précisent le sens ou les limites de certaines notions ; les énoncés de certaines définitions ou de certains résultats y sont parfois intégralement explicités, l'objectif étant ici d'unifier les pratiques des enseignants.

La chronologie retenue dans la présentation des différentes sections de chaque période ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression. Cependant, la progression retenue par chaque professeur au cours de chaque période doit respecter les objectifs de l'enseignement dispensé au cours de cette période.

## 1.3 Contenu du programme

Le programme défini un corpus de connaissances requises et de capacités attendues, et explicite des aptitudes et des compétences qu'une activité mathématique bien conçue est amène de développer. L'acquisition de ce socle par les élèves constitue un objectif prioritaire pour le professeur.

Il permet à tous les élèves d'acquérir progressivement le niveau requis pour la poursuite des enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études dans différents établissements de l'enseignement supérieur ; il leur permet également de se réorienter et de se former tout au long de leur parcours.

Le programme porte essentiellement sur l'algèbre linéaire, l'analyse et les probabilités. L'étude de chacun de ces trois domaines permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, et d'établir des liens avec d'autres disciplines.

Le programme d'algèbre linéaire prolonge l'étude abordée en classe de première année PCSI et aboutit à la réduction des endomorphismes et des matrices : diagonalisation, trigonalisation ; cette étude combine le point de vue géométrique (éléments propres, sous-espaces stables), algébrique (polynômes d'endomorphisme) et matricielles ; les principaux résultats y sont formulés en termes d'éléments propres et de polynômes annulateurs. Le reste du programme, consacré aux espaces préhilbertiens réels, prolonge l'étude de ces espaces déjà abordée en PCSI et abouti, en dimension finie, à la réduction, en base orthonormale, des endomorphismes autoadjoints (théorème spectral) et à l'étude des isométries vectorielles ; elle introduit aussi les endomorphismes autoadjoints positifs en vue de l'optimisation. ; cette étude met l'accent sur les relations entre les registres vectoriel, matriciel et géométrique.

En analyse, le programme introduit le concept d'espace vectoriel normé, ce qui permet d'aborder le calcul différentiel et fourni un cadre cohérent pour l'étude des suites, des séries et des fonctions et celle des suites et des séries de fonctions. L'intégration, la représentation des fonctions, notamment par des séries entières et par des intégrales dépendant d'un paramètre, l'approximation des fonctions, l'étude du calcul différentiel et des équations différentielles linéaires tiennent une place majeure.

L'étude de la topologie d'un espace vectoriel normé permet d'étendre les notions de suite, limite, continuité étudiées en première année dans le cadre de la droite réelle et de mettre en évidence quelques aspects de la dimension finie : équivalence des normes, théorème des bornes atteintes, continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales.

La section relative aux fonctions vectorielles permet la généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ des résultats d'analyse réelle étudiés en première année et fournit des outils pour les équations différentielles et le calcul différentiel ; on y aborde aussi une étude modeste des arcs paramétrés. Il favorise les interprétations et les représentations géométriques des objets étudiés, et fourni une occasion de relier les registres analytique et géométrique.

L'étude des suites et séries de fonctions et des différents mode de leur convergence conduit aux théorèmes de régularité de leur limite ou somme. Les séries entières permettent de construire des fonctions de variable complexe et de fournir des outils pour la résolution d'équations différentielles linéaires et pour l'expression des fonctions génératrices en probabilités.

La thématique de l'intégration est abordée dans deux sections distinctes. La première, étudié première période, introduit, pour les fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque, la notion d'intégrale généralisée et celle de fonction intégrable ; l'intégration des relations de comparaison dans le cas des fonctions positives permet de faire le lien avec les théorèmes similaires étudiés sur les séries. Les théorèmes classiques sur l'intégration des suites et séries de fonctions (convergence dominée, intégration terme à terme) et sur les intégrales à paramètre sont étudiés dans une autre section en deuxième période ; ils fournissent les outils nécessaires pour mener l'étude d'une fonction définie comme intégrale dépendant d'un paramètre.

L'étude des équations et des systèmes différentiels linéaires (à coefficients constants), dont les interventions sont fréquentes tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques, est basée sur le théorème de Cauchy qui permet d'établir la structure de l'ensemble des solutions. Le cas particulier où les coefficients sont constants permet notamment de mettre en oeuvre des techniques de réduction, illustrant la pertinence des outils de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes de l'analyse.

La section sur le calcul différentiel a pour objectif d'étendre l'étude menée en première année, sur les fonctions d'une ou deux variables, au cadre des fonctions de plusieurs variables et de donner une introduction à l'optimisation au premier et au second ordre. Les notions de dérivée selon un vecteur ou le long d'un arc, de gradient, de vecteurs tangents à une courbe ou surface constituent une première approche de la géométrie différentielle ; l'optimisation au second ordre s'appuie sur les endomorphismes autoadjoints. Parallèlement à cette vision algébrique et géométrique, cette section fournit aussi des outils opérationnels pour la résolution de problèmes (recherche d'extremums, équations aux dérivées partielles).

L'enseignement des probabilités présente brièvement le formalisme de Kolmogorov qui sera repris et approfondi dans le cursus post classes préparatoires. Son objectif majeur est l'étude des variables aléatoires discrètes et celle des variables à densité, ce qui permet d'élargir le champ des situations réelles se prêtant à une modélisation probabiliste.

On y étudie les bases de la théorie des probabilités : variables aléatoires, lois usuelles, notions d'indépendance et de probabilités conditionnelles, notions de moments et de fonctions génératrices ; cette section débouche sur des résultats d'approximation (loi faible des grands nombres, théorème de la limite centrée). La loi faible des grands nombres permet de justifier a posteriori l'approche fréquentiste d'une probabilité pour un schéma de Bernoulli. L'inégalité qui la sous-tend (inégalité de Bienaymé-Tchebychev) précise la vitesse de convergence de cette approximation et valide l'interprétation de la variance comme indicateur de dispersion. Ce chapitre a vocation à interagir avec le reste du programme, notamment en exploitant les séries génératrices et l'intégration sur un intervalle quelconque.

Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces préhilbertiens, les fonctions de variable réelle ou vectorielle.

Le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels) ; il intègre la construction et la mise en forme d'algorithmes et, sur des exemples, la comparaison de leurs performances.

## 1.4 Organisation temporelle de la formation

Le programme de la classe de deuxième année PSI est présenté en deux grandes parties, chacune d'elles correspondant à une période. Le programme de la première période est étudié complètement en premier lieu, lors des quatre premiers mois de l'année ; celui de la deuxième période est ensuite abordé. Le programme doit être traité en veillant à alterner, de préférence, des chapitres d'analyse, de probabilité, d'algèbre et de géométrie euclidienne.

## 1.5 Recommandations pédagogiques pour le choix d'une progression

Le programme est présenté en deux grandes parties, mais son organisation n'est pas un plan de cours ; il va de soi que cette présentation n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre les différents domaines des mathématiques.

Les sections qui composent le programme suivent un ordre thématique qui n'est d'ailleurs pas le seul possible. Cette organisation a pour objet de présenter les différentes notions du programme de mathématiques et ne peut en aucun cas être considéré comme une progression de cours.

Chaque professeur adopte librement la progression qu'il juge adaptée au niveau de sa classe et conduit l'organisation de son enseignement dans le respect de la cohérence de la formation globale et en privilégiant la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Il choisit ses méthodes et ses problématiques en privilégiant la mise en activité [1] effective des élèves et en évitant tout dogmatisme, et ce quel que soit le temps d'enseignement proposé (cours, travaux dirigés, etc.). En effet, l'acquisition des connaissances et le développement des capacités et des compétences sont d'autant plus efficaces que les élèves sont acteurs de leur formation. Le contexte d'enseignement retenu et les supports pédagogiques utilisés doivent motiver les élèves et favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie de ces derniers. Les situations de résolution de problèmes, de la modélisation jusqu'à la présentation des résultats en passant par la démarche de résolution proprement dite, favorisent cette mise en activité.

En contrepartie de cette liberté dans l'organisation de la progression, le respect des *objectifs de formation et son étalement dans l'année*, comme indiqués ci-dessus, reste une nécessité incontournable.

1. " Tell me and I forget, teach me and I may remember, involve me and I learn." Benjamin Franklin (« Dis-moi et j'oublie, enseigne-moi et je peux me rappeler, implique-moi et j'apprends. »)

# Première période

## 1 Rappels et compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

Cette section a un triple objectif :

- consolider et approfondir les acquis de la classe de première année PCSI relatifs à l'étude des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire notamment en dimension finie ;
- étudier de nouveaux concepts : somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels, somme directe, sous-espaces stables, matrices par blocs, trace, polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées, polynômes interpolateurs de Lagrange ;
- exploiter les articulations entre le point de vue vectoriel/géométrique et le point de vue matriciel, et les apports du passage d'un point de vue à un autre.

Le programme valorise les interprétations et les illustrations géométriques des notions et des résultats étudiés, ce qui permet de développer une visualisation des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition. On attachera ici une importance à cet aspect en ayant recours à de nombreuses figures.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- maîtrisent l'algèbre linéaire en dimension finie et, notamment, l'articulation entre ùle point de vue géométrique (vecteurs et applications linéaires) et le point de vue matriciel ;
- soient capables d'exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre (systèmes linéaires, polynômes, interpolation, équations aux différences finies), de l'analyse (récurrences linéaires et équations différentielles linéaires) et de la géométrie.

*Dans toute cette section, $E$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où le corps de base $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

### 1.1 Produit et somme d'espaces vectoriels

| | |
|---|---|
| Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie. | |
| Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels ; famille finie de sous-espaces vectoriels en somme directe ; sous-espaces supplémentaires. | Caractérisation d'une somme directe par l'unicité de la décomposition du vecteur nul. |
| Base d'un espace vectoriel $E$, de dimension finie, adaptée à une décomposition en somme directe $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ d'une famille finie $F_1, \ldots, F_r$ de sous-espaces vectoriels de $E$. | Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement (ou partition) d'une base. |
| Caractérisation par la dimension d'une somme directe finie de sous-espaces vectoriels de dimension finie. | Si $F_1, \ldots, F_r$ sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie, alors le sous-espace vectoriel $\sum_{i=1}^{r} F_i$ est de dimension finie et on a $$\dim\left(\sum_{i=1}^{r} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{r} \dim(F_i),$$ |

| | |
|---|---|
| | avec égalité si, et seulement si, la somme est directe. |
| Si $E_1, \ldots, E_r$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$ tels que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ et si $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour tout $i$, alors il existe une et une seule application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u_{\vert E_i} = u_i$ pour tout $i$. | Définition de la famille $p_1, \ldots, p_r$ des projecteurs associés à la décomposition $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$. |

## 1.2 Matrices par blocs et sous-espaces stables

| | |
|---|---|
| Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition). | La démonstration concernant le produit par blocs n'est pas exigible. |
| Rappels sur les déterminants ; exemples de calculs. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. | Les élèves doivent savoir calculer le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. |
| Sous-espace $F$ stable par un endomorphisme $u$ de $E$ ; endomorphisme $u_F$ de $F$ induit par $u$. Si $u$ et $v$ commutent alors le noyau et l'image de $u$ sont stables par $v$. | Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs. |

## 1.3 Trace d'une matrices, d'un endomorphismes

| | |
|---|---|
| Trace d'une matrice carrée ; linéarité de la trace, trace d'une transposée, relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. | $\mathrm{Tr}(A)$, $\mathrm{tr}(A)$. |
| Invariance de la trace par similitude. | Deux matrices carrées semblables ont la même trace. |
| Trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ; linéarité de la trace, relation $\mathrm{tr}(uv) = \mathrm{tr}(vu)$. | Notations $\mathrm{Tr}(u)$, $\mathrm{tr}(u)$. |
| Trace d'un projecteur. | La trace d'un projecteur est égale à son rang. |

## 1.4 Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

| | |
|---|---|
| Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. | Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. |
| Polynôme annulateur. | Applications au calcul des puissances et de l'inverse. |
| Deux polynômes de l'endomorphisme $u$ commutent. | En particulier, si $P \in \mathbb{K}[X]$, le noyau et l'image de $P(u)$ sont stables par $u$. |
| Adaptation de ces résultats aux matrices carrées. | |

## 1.5 Interpolation de Lagrange

| | |
|---|---|
| Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$. | Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base. La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points est le polynôme constant égal à 1. |
| Déterminant de Vandermonde. | Lien avec le problème d'interpolation de Lagrange. Les élèves doivent connaître l'expression d'un déterminant de Vandermonde. |

# 2 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Cette section a un double objectif :

- approfondir les notions étudiées en première année PCSI et étudier la réduction des endomorphismes et des matrices ;
- exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie.

Les approches ou méthodes qui y sont présentées sont de deux types : les unes, de nature géométrique, reposent sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; les autres, de nature algébrique, font appel aux polynômes annulateurs.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- acquièrent les notions de base sur la réduction des endomorphismes et des matrices (éléments propres, sous-espace stable, critères de réduction reposant sur les sous-espaces propres ou les polynômes annulateurs) ;
- puissent mettre en oeuvre ces notions pour mener l'étude, dans des cas standard, de la diagonalisation et de la trigonalisation des matrices et des endomorphismes, en dimension finie ;
- soient capables d'exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse (recherche des solutions d'une récurrence linéaire à coefficients constants, étude et résolution d'équations différentielles linéaires) et de la géométrie (étude des isométries et des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien).

L'étude des classes de similitude ainsi que la notion de polynôme minimal sont hors programme.

*Dans ce qui suit, $E$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où le corps de base $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

## 2.1 Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

| | |
|---|---|
| Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme. | Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$. Si deux endomorphismes $u$ et $v$ commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre. |
| Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres. | Notation $\mathrm{Sp}(u)$. La notion de valeur spectrale est hors programme. |
| La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe. | Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre. |
| Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie $n$ est fini de cardinal au plus $n$. | |
| Si $P$ est un polynôme annulateur de $u$, toute valeur propre de $u$ est racine de $P$. | Si $u(x) = \lambda x$ , alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$. |
| Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée. | Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$. Deux matrices semblables ont même spectre. |

## 2.2 Polynôme caractéristique

| | |
|---|---|
| Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. | Notations $\chi_A$, $\chi_u$. Par convention, le polynôme caractéristique est unitaire ; valeurs des coefficients des monômes de degrés 0 et $n-1$ dans $\chi_u$, $\chi_A$. |
| Les racines du polynôme caractéristique dans le corps de base sont les valeurs propres. | Spectre complexe d'une matrice carrée réelle. |

| | |
|---|---|
| Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité. | Si le polynôme caractéristique $\chi_u$ (respectivement $\chi_A$) est scindé alors la somme et le produit des valeurs propres de $u$ (resp. $A$), comptées avec leur multiplicité, sont respectivement égaux à la trace et au déterminant de $u$ (resp. $A$). |
| Une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique ; le polynôme caractéristique est un invariant de similitude. | En particulier, deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités. |
| Théorème de Cayley-Hamilton. | Démonstration non exigible. |

## 2.3 Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

| | |
|---|---|
| Un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de $E$ dans laquelle sa matrice est diagonale. | Une telle base est constituée de vecteurs propres. |
| Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.<br>Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé soit diagonalisable. | Application au calcul des puissances d'une matrice diagonalisable, à la résolution des récurrences linéaires à coefficients constants, à des exemples de systèmes différentiels à coefficients constants.<br>Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$. |
| Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à $E$. | Cas des projecteurs, des symétries. |
| Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme des dimension de ses sous-espaces propres soit égale à la dimension de $E$. | Traduction matricielle. |
| Pour qu'un endomorphisme $u$ soit diagonalisable, il faut et il suffit que $\chi_u$ soit scindé sur le corps de base $\mathbb{K}$ et que, pour toute valeur propre de $u$, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité (comme racine de $\chi_u$). | Traduction matricielle. |
| Un endomorphisme d'un espace de dimension $n$ admettant $n$ valeurs propres distinctes est diagonalisable. | Polynôme caractéristique scindé à racines simples.<br>Traduction matricielle. |

## 2.4 Application à la diagonalisabilité de la notion de polynôme annulateur

| | |
|---|---|
| Un endomorphisme $u$ est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur de $u$ scindé à racines simples. | Démonstration non exigible.<br>Interprétation de ce résultat dans le registre matriciel.<br>Le lemme de décomposition des noyaux est hors programme. |
| L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable. | |
| Un endomorphisme $u$ est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme $\prod\limits_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)$ est annulateur de $u$. | Traduction matricielle. |

## 2.5 Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

| | |
|---|---|
| Un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de $E$ dans laquelle sa matrice est triangulaire. | Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres. |
| Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire. | Pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit. |
| Un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé sur le corps de base $\mathbb{K}$.<br>En particulier, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable. | Démonstration non exigible.<br>Interprétation dans le registre matriciel.<br>La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limitera dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication. |

# 3 Topologie des espaces normés

Cette section prolonge les notions de limites, de suites, de séries et de fonctions étudiées en première année PCSI ; il introduit la topologie des espaces vectoriels normés de dimension finie, ce qui permet de fournir un cadre cohérent pour l'étude de ces notions à un niveau supérieur (suites de matrices, fonctions à valeurs vectorielles, calcul différentiel). Le théorème admis d'équivalence des normes permet de ramener l'étude topologique à celle de l'espace $\mathbb{K}^p$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) qui peut servir de cadre à la présentation des différentes notions (boules, ouverts, limite et continuité, …).

Cette section prépare également l'introduction de normes sur des espaces fonctionnels afin de fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.

Les concepts étudiés ici se prêtent à des représentations issues de différents registres ; dans ce cadre, on tâchera de souligner le contenu géométrique des notions abordées, notamment en ayant recours à de nombreuses figures.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- aient une bonne connaissance des normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ et sur les espaces de matrices, sachent en établir les propriétés et soient capables de les comparer ;
- acquièrent les notions de base sur l'étude locale d'une suite et d'une fonction, et connaissent les propriétés globales des fonctions continues ;
- sachent exploiter la densité pour établir des relations entre fonctions continues.

*Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

## 3.1 Normes et espaces vectoriels normés

| | |
|---|---|
| Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe.<br>Espace vectoriel normé. | Vecteurs unitaires. |
| Normes usuelles $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. | |
| Normes usuelles sur un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base. | |
| Normes usuelles $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. | Lorsque $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ :<br>$$\|A\|_1 = \sup_{1\leqslant j\leqslant p} \sum_{i=1}^{n} \lvert a_{i,j}\rvert \qquad \|A\|_\infty = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{p} \lvert a_{i,j}\rvert$$<br>$$\|A\|_2 = \Bigg( \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \lvert a_{i,j}\rvert^2 \Bigg)^{1/2}$$ |

| | |
|---|---|
| Si $X$ est un ensemble non vide, norme de la convergence uniforme sur l'espace $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ des fonctions bornées de $X$ dans $\mathbb{K}$. | Notation $\\| \ \\|_\infty$ ; norme dite infinie ou uniforme. |
| Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ des fonctions continues sur un segment $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. | Notations $\\| \ \\|_1$ et $\\| \ \\|_2$. |
| Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel. | |
| Produit fini d'espaces vectoriels normés. | Norme produit. |
| Distance associée à une norme. | Inégalité triangulaire. Distance à une partie. |
| Boules fermées, boules ouvertes, sphères.<br>Parties convexes ; convexité des boules.<br>Parties, suites et fonctions bornées. | |

## 3.2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

| | |
|---|---|
| Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. | Exemples de suites de matrices, de suites dans des espaces de fonctions. |
| Opérations algébriques sur les suites convergentes. | |
| Caractère borné d'une suite convergente. | |
| Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente. | |

## 3.3 Comparaison de normes

| | |
|---|---|
| Normes équivalentes : deux normes $N$ et $N'$ sur un espace vectoriel sont dites équivalentes s'il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ strictement positifs tels que $N \leqslant \alpha N' \quad \text{et} \quad N' \leqslant \beta N.$ | Illustration sur des normes simples définies sur $\mathbb{K}^p$ et sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.<br>La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. |
| Invariance du caractère borné par passage à une norme équivalente. | |
| Invariance de la convergence d'une suite par passage à une norme équivalente. | Utilisation des suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes. |

## 3.4 Topologie d'un espace vectoriel normé

| | |
|---|---|
| Ouvert. Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie. | Une boule ouverte est un ouvert. |
| Fermé. Stabilité par intersection quelconque, par réunion finie. | Une boule fermée et une sphère sont fermées. |
| Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. | Ces notions sont illustrées par des figures. |
| Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. | |
| Partie dense. | Exemples de parties denses de $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. |
| Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente. | |

## 3.5 étude locale, propriétés globales d'une application continue

| | |
|---|---|
| Si $E$ et $F$ sont des espaces normés, $A$ une partie non vide de $E$ et $f : A \to F$ une application, limite de $f$ en un point $a$ adhérent à $A$. Caractérisation séquentielle. | Extensions de la notion de limite : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ ; limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers$+\infty$ ou vers $-\infty$, lorsque $A$ est une partie de $\mathbb{R}$ ; limite infinie en $a$ adhérent à $A$ pour une application à valeurs réelles. |
| Opérations algébriques sur les limites. | |
| Limite d'une composée. | |
| Continuité en un point. | Caractérisation séquentielle de la continuité en un point. |
| Applications continues sur une partie. Opérations algébriques sur les applications continues. Composition d'applications continues. | Les élèves doivent savoir que deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales. |
| Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue. | Si $f$ est une application continue de $E$ dans $\mathbb{R}$, alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ (ou $f(x) < 0$) est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ ou $f(x) \leqslant 0$ sont des fermés. |
| Applications lipschitziennes ; continuité des applications lipschitziennes. | Exemple : caractère 1−lipschitzien de l'application $x \mapsto d(x, B)$, où $B$ est une partie non vide d'un espace vectoriel normé. |

## 3.6 Espaces vectoriels normés de dimension finie

L'étude topologique d'un espace normé de dimension finie $E$ se ramène à celle de $\mathbb{K}^p$ muni d'une norme.

| | |
|---|---|
| Théorème de l'équivalence des normes sur un espace vectoriel de dimension finie. | Démonstration hors programme. |
| Caractérisation de la convergence d'une suite et de l'existence de la limite d'une fonction à l'aide des coordonnées dans une base. | La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base. |
| Théorème des bornes atteintes : toute fonction réelle continue sur une partie non vide, fermée et bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes (existence d'extrémums). | Si $E$ et $F$ sont des espaces de dimension finie et $f$ une fonction continue sur une partie non vide, fermée et bornée $K$ de $E$, à valeurs dans $(F, \|\ \|)$, alors $f$ est bornée et la fonction $x \mapsto \|f(x)\|$, définie sur $K$, atteint ses bornes. |
| Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales sur $\mathbb{K}^n$. | Exemples du déterminant, du produit matriciel. Exemples d'étude de la continuité de fonctions définies sur une partie de $\mathbb{K}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La notion de norme subordonnée est hors programme. |

# 4 Intégration des fonctions continues par morceaux sur un intervalle

L'objectif de cette section est de définir, dans le cadre restreint des fonctions continues par morceaux, les notions d'intégrale convergente et d'intégrabilité sur un intervalle quelconque. On soulignera l'importance du principe de comparaison pour ramener l'étude de l'intégrabilité d'une fonction à l'estimation de son comportement aux bornes de l'intervalle d'intégration.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves :

- sachent établir la convergence ou la divergence d'une intégrale dans des cas standard et en particulier soient capables de comparer une fonction positive aux fonctions de référence ;
- aient mis en oeuvre les techniques d'intégration usuelles pour étudier ou calculer l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque.

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des énoncés.

Les fonctions considérées ici sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des nombres réels ou celui des nombres complexes.



## 4.1 Fonctions continues par morceaux

| | |
|---|---|
| Fonctions continues par morceaux un segment, sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Opérations sur les fonctions continues par morceaux. | Une fonction $f$ est dite continue par morceaux sur $I$ si sa restriction à tout segment de $I$ est continue par morceaux. |
| Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux. | Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année PCSI.<br>Aucune construction n'est exigible. |

## 4.2 Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, avec $a \in \mathbb{R}$

| | |
|---|---|
| Intégrale généralisée (ou « impropre ») convergente : soit $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{K}$ continue par morceaux ; l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ admet une limite dans $\mathbb{K}$ en $+\infty$. | Notation : en cas de convergence, $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f$ se note $\int_a^{+\infty} f$ ou $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, et on dit que l'intégrale est convergente en $+\infty$.<br>Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est convergente et $f$ est continue, dérivation sur $[a, +\infty[$ de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$. |
| Si $f$ est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée. | Écriture $\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence. |
| Si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues parmorceaux sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, alors la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$. | Le résultat s'applique en particulier si $f(x) = \mathrm{O}_{+\infty}\big(g(x)\big)$ ou si $f(x) = \mathrm{o}_{+\infty}\big(g(x)\big)$. |
| Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. | Intégrale de RIEMANN. |
| Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$. | |

## 4.3 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, avec $a \in \mathbb{R}$

| | |
|---|---|
| Une fonction $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{K}$ est dite intégrable sur $[a, +\infty[$ si elle est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et si $\int_a^{+\infty} \lvert f\rvert$ converge.<br>Pour $f$ de signe constant, $\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, $f$ est intégrable sur $[a, +\infty[$. | On utilise indifféremment les expressions « $f$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ » et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ».<br>Un calcul montrant que $\int_a^{+\infty} \lvert f\rvert < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité. |
| Si $f$ est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge. | Fonction intégrable en $+\infty$. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme. |
| Théorème de comparaison : pour $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$, à va- | Adaptation au cas d'un intervalle quelconque. |

leurs dans $\mathbb{K}$ :

- si $f(x) = \mathrm{O}_{+\infty}(g(x))$, alors l'intégrabilité de $g$ sur $[a,+\infty[$ implique celle de $f$ ;
- si $|f(x)| \underset{+\infty}{\sim} |g(x)|$, alors l'intégrabilité de $g$ sur $[a,+\infty[$ équivaut à celle de $f$.

Le résultat s'applique en particulier si $f(x) = \mathrm{o}_{+\infty}(g(x))$.

Le résultat s'applique en particulier si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$.

## 4.4 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert (ou ouvert) $I$ de $\mathbb{R}$, dont les extrémités inférieure et supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) sont notées $a$ et $b$ respectivement.

Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Intégrale convergente en $b$, en $a$.
Écriture $\int_a^b f = +\infty$ si $f$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'intégrale divergente.
Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence.

Si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, dont les extrémités inférieure et supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) sont notées $a$ et $b$ respectivement, linéarité de l'application

$$f \longmapsto \int_a^b f,$$

définie sur l'espace vectoriel des fonctions continue par morceaux de $I$ dans $\mathbb{K}$ dont l'intégrale converge.
Positivité dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Relation de Chasles.

$f$ est intégrable sur $I$ si, et seulement si, pour tout $c \in I$, $f$ est simultanément intégrable sur $I \cap [c,+\infty[$ et $I \cap ]-\infty, c]$ et dans ce cas

$$\int_I f = \int_{I\cap]-\infty,c]} f + \int_{I\cap[c,+\infty[} f.$$

Intégration par parties sur un intervalle quelconque

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'existence de deux des trois termes apparaissant dans la formule justifie le calcul.
Dans la pratique, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité de $f$ et $g$.
On considère sur quelques exemples l'utilisation de la formule d'intégration par parties pour ramener l'étude de la convergence d'une l'intégrale à celle d'une intégrale absolument convergente.

Formule de changement de variable dans une intégrale sur un intervalle quelconque : étant données une fonction $f$ continue sur un intervalle $I$ et une fonction $\varphi$ bijective et de classe $C^1$ d'un intervalle $J$ sur l'intervalle $I$, les intégrales $\int_I f$ et $\int_J (f\circ\varphi)\,|\varphi'|$ sont de même nature et sont égales en cas de convergence.

Les élèves peuvent appliquer ce résultat sans justification dans des cas de changement de variable usuels (fonctions affine, puissance, exponentielle, logarithme, …).

## 4.5 Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente.
La convergence absolue implique la convergence.

| | |
|---|---|
| Fonction intégrale sur un intervalle $I$ : une fonction est dite intégrable sur l'intervalle $I$ si elle y est continue par morceaux et si son intégrale sur $I$ est absolument convergente. | On utilise indifféremment les expressions « $f$ est intégrable sur $[a, b[$ » et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ». Fonction intégrable en $b$, en $a$. |
| Espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables de $I$ dans $\mathbb{K}$. | Pour $f \in L^1(I, \mathbb{K})$, notation $\int_I f$, $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$. |
| Inégalité triangulaire. | $\left\|\int_I f\right\| \leqslant \int_I \|f\|$. |
| Si $f$ est continue et intégrable sur $I$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et si $\int_I f = 0$, alors $f$ est identiquement nulle. | |
| Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque. | |
| étude de l'intégrabilité sur $]0, 1]$ des fonctions de référence usuelles : $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \|\ln x\|$. | La fonction $f$ est intégrable en $a^+$ (resp. $b^-$) si, et seulement si, la fonction $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en $0^+$. |
| Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ sur $]a, b]$ et de $x \mapsto \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ sur $[a, b[$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. | Intégrales de RIEMANN : $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$. |

## 5 Fonctions vectorielles d'une variable réelle, notions sur les arcs paramétrés

Cette section poursuit trois objectifs :

- consolider les acquis de première année PCSI concernant la dérivation des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes et étendre ces résultats au cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 1$ ;
- formaliser des notions géométriques (arc paramétré, tangente) et cinématiques (vitesse, accélération) rencontrées dans d'autres disciplines scientifiques ;
- fournir des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et le calcul différentiel.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- connaissent et sachent exploiter l'interprétation cinématique et graphique de la notion de dérivée en un point ;
- soient capables de mener l'étude de fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et en particulier d'en établir les propriétés liées à la dérivabilité et à la classe $C^k$, $k \in \mathbb{N}^*$ ;
- sachent déterminer la tangente et la normale à un arc paramétré plan en un point associé à un paramètre régulier.

*Les fonctions étudiées ici sont définies sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 1$.*

### 5.1 Dérivation

| | |
|---|---|
| Dérivabilité d'une fonction en un point. Expression des composantes de la dérivée en un point. Dérivabilité à droite et à gauche. | Formes équivalentes : taux d'accroissement, développement limité à l'ordre 1. Interprétation géométrique. Interprétation cinématique, vitesse instantanée. |
| Dérivabilité sur un intervalle, application dérivée. | |
| Combinaison linéaire de fonctions dérivables, linéarité de la dérivation. | $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$. |

| | |
|---|---|
| Dérivabilité et dérivée d'une application de la forme $L \circ f$ où $L$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. | $(L \circ f)' = L \circ f'$. |
| Dérivabilité et dérivée d'une application de la forme $B(f,g) : t \mapsto B\big(f(t), g(t)\big)$ où $B$ est une application bilinéaire, ou de la forme $M(f_1, \dots, f_p)$ : $t \mapsto M\big(f_1(t), \dots, f_p(t)\big)$ où $M$ est une application multilinéaire. | La dérivée de $t \mapsto B\big(f(t), g(t)\big)$ est l'application $t \mapsto B\big(f'(t), g(t)\big) + B\big(f(t), g'(t)\big)$. |
| Cas du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, du produit mixte et du carré de la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ ; cas du déterminant. | La dérivée de $t \mapsto \langle f(t), g(t)\rangle$ est l'application $t \mapsto \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle$, celle de $t \mapsto \|f(t)\|^2$ est $t \mapsto 2\langle f'(t), f(t)\rangle$. |
| Dérivabilité et dérivée de $f \circ \varphi$ où $\varphi$ est une fonction réelle de variable réelle et $f$ une fonction vectorielle. | $(f \circ \varphi)' = \varphi'.(f' \circ \varphi)$. |
| Applications $k$ fois dérivables, de classe $C^k$, de classe $C^\infty$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. | Interprétation cinématique de la dérivée seconde, accélération. |
| Opérations algébriques sur les applications de classe $C^k$. | Espace vectoriel $C^k(I, \mathbb{R}^n)$ des applications de classe $C^k$ sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, algèbre $C^k(I)$ des fonctions de classe $C^k$ sur $I$ à valeurs réelles ou complexes, $0 \leqslant k \leqslant +\infty$. |
| Dérivée $k$-ième d'une application de la forme $$B(f,g) : t \mapsto B\left(f(t), g(t)\right),$$ $B$ étant une application bilinéaire : si $f$ et $g$ sont $k$ fois dérivables (resp. de classe $C^k$) alors $B(f,g)$ l'est aussi. Expression de la dérivée $k$-ième de $B(f,g)$ : formule de Leibniz. | pour tout $t \in I$, $$\big(B(f,g)\big)^{(k)}(t) = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} B\big(f^{(p)}(t), g^{(k-p)}(t)\big).$$ |
| La composée $f \circ \varphi$ d'une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $C^k$ sur $I$ et d'une application $\varphi$ de classe $C^k$ sur un intervalle $J$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $I$ est de classe $C^k$ sur $J$. | |

### 5.2 Notions sur les arcs paramétrés

| | |
|---|---|
| Arc paramétré de classe $C^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Support de l'arc (ou courbe associée). Multiplicité d'un point du support. | Interprétation cinématique des dérivées d'ordre 1 et 2. |
| Paramètre régulier. Tangente en un point associé à un paramètre régulier ; normale à un arc paramétré plan en un point associé à un paramètre régulier. | Exemples simples d'arcs paramétrés plans. |

## 6 Compléments sur les séries numériques - Suites et séries de fonctions

Cette section vise trois objectifs :

- consolider et élargir les acquis de première année PCSI sur les séries numériques, notamment la comparaison d'une série à une intégrale et la notion de produit de Cauchy de deux séries ;
- définir les modes usuels de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions (convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions) ;
- exploiter ces types de convergence pour étudier la stabilité des propriétés des fonctions par

passage à la limite (interversion des limites, continuité, dérivation, intégration).

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- soient capables de mener l'étude de la convergence d'une suite ou d'une série de fonctions et en maîtrisent les techniques ;
- soient en mesure de mettre en oeuvre ces techniques et les exploiter pour l'étude des propriétés de la limite d'une suite (ou de la somme d'une série) de fonctions (régularité, étude asymptotique, comparaison série-intégrale).

## 6.1 Compléments sur les séries numériques

*La semi-convergence des séries numériques n'est pas un objectif du programme.*

| | |
|---|---|
| Rappels de cours de PCSI et exercices de révisions sur les séries numériques. | Séries à termes positifs (critère de convergence), séries alternées (critère de Leibniz ou théorème spécial), séries absolument convergentes. |
| Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence, dans les cas convergent et divergent. | La suite de référence est de signe constant à partir d'un certain rang. Cas particulier : théorème de Cesaro (pour une limite finie ou infinie). |
| Comparaison de l'intégrale $\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f(n)$ pour une fonction $f : [0,\infty[ \to \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux et décroissante : la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f(n)$ converge si, et seulement si, $f$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. | Les élèves doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes, notamment dans le cas d'une fonction monotone. |
| Formule de Stirling : équivalent de $n!$. | Démonstration non exigible. |
| Définition du produit de Cauchy de deux séries numériques. | La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, est appelée la série produit de Cauchy des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n$. |
| Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes : si les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n$ sont absolument convergentes, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n$ l'est aussi et on a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\right)$. | Démonstration non exigible. |

## 6.2 Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions

| | |
|---|---|
| Convergence simple d'une suite ou d'une série d'applications d'un ensemble non vide $X$ dans un espace vectoriel normé de dimension finie $F$. | Les notions de convergence simple et uniforme d'une série de fonctions sont définies via la suite de ses sommes partielles. |
| Convergence uniforme d'une suite ou d'une série d'applications de $X$ dans $F$. | |
| La convergence uniforme implique la convergence simple.<br>Une série de fonctions converge uniformément si, et seulement si, elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0. | |

| | |
|---|---|
| Norme de la convergence uniforme sur l'espace $\mathcal{B}(X, F)$ des applications bornées de $X$ dans $F$ ; cette norme est dite norme infinie ou norme uniforme. | Dans l'espace $\mathcal{B}(X, F)$, muni de la norme de la convergence uniforme, interprétation de la convergence uniforme d'une suite de fonctions en terme de norme. |
| Convergence normale d'une série d'applications de $X$ dans $F$. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point. | Pour établir la convergence normale d'une série de fonctions $\sum\limits_n f_n$, les élèves doivent savoir utiliser une série numérique convergente $\sum\limits_n \alpha_n$ qui soit majorante, c'est-à-dire telle que pour tout $n$, $\lVert f_n \rVert_\infty \leqslant \alpha_n$. |

## 6.3 Stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite

$X$ désigne ici une partie non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie $E$.

**Théorème d'interversion des limites (double limite) :**

| | |
|---|---|
| soient $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de $X$ dans $F$ convergeant uniformément vers $f$ sur $X$, $a$ un point de $E$ adhérent à $X$ ; si, pour tout $n \geqslant 0$, la fonction $f_n$ admet une limite $\ell_n \in F$ en $a$, alors la suite $(\ell_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite $\ell \in F$ et on a $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ ; autrement dit $$\lim_{x\to a}\Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\lim_{x\to a} f_n(x)\Big).$$ | Démonstration hors programme. Adaptation, si $X$ est un intervalle non majoré (resp. non minoré) de $\mathbb{R}$, au cas où $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$). Extension du théorème et de son adaptation au cas des séries de fonctions : interversion d'une limite et d'une somme. |

**Théorème de continuité :**

| | |
|---|---|
| Continuité en $x_0 \in X$ de la limite d'une suite (ou de la somme d'une série) d'applications de $X$ dans $F$, continues en $x_0$, convergeant uniformément. Continuité de la limite d'une suite (ou de la somme d'une série) uniformément convergente d'applications continues de $X$ dans $F$. | Adaptation au cas où $X$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ : le théorème s'applique aussi dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme est satisfaite sur tout segment contenu dans $X$ ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation. |

**Intégration d'une limite uniforme sur un segment :**

| | |
|---|---|
| Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0$ un point de $I$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues de $I$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur tout segment contenu dans $I$ vers une fonction $f : I \to \mathbb{K}$. Pour $n$ dans $\mathbb{N}$ et $x$ dans $I$, on pose : $g_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n$ et $g(x) = \int_{x_0}^{x} f$. Alors la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers $g$ sur tout segment contenu dans $I$. | En particulier, si la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers $f$ sur le segment $[a, b]$, alors : $$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b f.$$ Comparaison entre la convergence uniforme et la convergence en moyenne sur $C([a, b], \mathbb{K})$. |
| Théorème d'intégration terme à terme d'une séries de fonctions continues convergeant uniformément. | Adaptation du théorème précédent au cas des séries de fonctions. |

**Dérivation de la limite d'une suite de fonctions :**

| | |
|---|---|
| Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de classe $C^1$ de $I$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $I$ vers une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ et que la suite $(f_n')_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur tout segment contenu dans $I$ vers une fonction $h : I \to \mathbb{K}$. Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers | Adaptation au cas des séries de fonctions : théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe $C^1$. Le théorème et son adaptation s'appliquent aussi dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme est satisfaite sur d'autres intervalles adaptés à la situation. |

$f$ sur tout segment contenu dans $I$, $f$ est de classe $C^1$ sur $I$ et $f' = h$.

Extension aux suites de fonctions de classe $C^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de la suite $(f_n^{(p)})_{n\geqslant 0}$ pour tout $p \in \{0, \ldots, k-1\}$ et de convergence uniforme de la suite $(f_n^{(k)})_{n\geqslant 0}$ sur tout segment contenu dans $I$.

Adaptation au cas des séries de fonctions : extension aux séries de fonctions de classe $C^k$.

Le théorème et son adaptation s'appliquent aussi dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme est satisfaite sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

## 7 Séries entières

Les séries entières constituent un outil puissant pour aborder certains calculs : résolution d'équations différentielles linéaires, expressions des fonctions génératrices en probabilités, … Elles permettent également de revenir sur la thématique de la régularité des fonctions, introduite en première année, et donnent l'occasion d'introduire la « variable complexe ».

Dans ce cadre, cette section vise trois objectifs :

- étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme, grâce au concept fondamental de rayon de convergence ;
- introduire la notion de développement d'une fonction en série entière (série de Taylor) ;
- établir les développements en série entière des fonctions usuelles.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- puissent déterminer le rayon de convergence d'une série entière dans des cas standard ;
- connaissent les propriétés d'une telle série et celles de sa somme (domaines de convergence simple, uniforme et normale ; continuité de la somme ; dérivation et intégration terme à terme) ;
- connaissent les développements en série entière usuels et sachent les exploiter pour exprimer la somme d'une série de fonctions ou les solutions d'une équation à l'aide des fonctions élémentaires.

Les coefficients des séries entières considérées ici sont réels ou complexes.

*Pour tout $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on pose $D(0, r) := \{z \in \mathbb{C},\ |z| < r\}$ ; si $0 < r < +\infty$, $D(0, r)$ est le disque ouvert de centre $0$ et de rayon $r$ ; par abus de langage, on dira que $\mathbb{C}$ est le disque ouvert de rayon $+\infty$.*

### 7.1 Rayon de convergence d'une série entière

Notion de série entière associée à une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres complexes.

Notation $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée alors, pour tout nombre complexe $z \in D(0, |z_0|)$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Rayon de convergence $R$ d'une série entière. Disque ouvert $D(0, R)$ de convergence ; intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

Le rayon de convergence $R$ est défini comme la borne supérieure dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ de l'ensemble $\{\rho \geqslant 0\ ;\ (a_n \rho^n)_n \text{ borne}\}$.

La série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in D(0, R)$ ; elle est grossièrement divergente pour tout $z$ tel que $|z| > R$.

Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence $R_a$ et $R_b$ respectivement. Si

En particulier, si $a_n = O(b_n)$ ou si $a_n = o(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$ et si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

$|a_n| \leqslant |b_n|$ alors $R_a \geqslant R_b$ .

Une série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et sa série entière dérivée $\sum\limits_{n\geqslant 0} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.

Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Règle de d'Alembert : rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ si la suite $\left(|a_{n+1}|/|a_n|\right)_{n\geqslant 0}$ est définie et admet une limite dans $[0, +\infty]$.

Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.

Minoration des rayons de convergences ; linéarité de la somme, somme du produit de Cauchy.

## 7.2 Propriétés de la somme

La convergence d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est normale sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon strictement inférieur à $R$.

En particulier, la convergence d'une telle série est normale sur toute partie fermée et bornée contenue dans $D(0, R)$.

La convergence d'une série entière de la variable réelle est normale sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.

Continuité de la somme d'une série entière (de la variable complexe) sur son disque ouvert de convergence.

L'étude des propriétés de la somme au bord du disque ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.

Primitivisation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, une primitive sur l'intervalle $]-R, R[$ de la fonction $f : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ s'obtient en intégrant terme à terme la série définissant $f$.

La somme d'une série entière est de classe $C^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.

La fonction $f : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est de classe $C^\infty$ sur $]-R, R[$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{f^{(k)}(t)}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n t^{n-k}, \ t \in ]-R, R[.$$

Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées successives en 0 de sa somme : avec les notations précédentes, $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Si les fonctions $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un voisinage de 0, alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



## 7.3 Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction

Fonction développable en série entière an voisinage d'un point.

Fonction développable en série entière sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon $R$.

Développement de $z \mapsto e^z$ sur $\mathbb{C}$ ; développement de $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$ sur $D(0, 1)$.

$e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$ ; $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$, $|z| < 1$.

Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$, $r > 0$.

Une telle fonction est en particulier de classe $C^\infty$ sur l'intervalle $]-r, r[$.

| | |
|---|---|
| Série de Taylor d'une fonction de classe $C^\infty$ sur un intervalle $]-r, r[$, $r > 0$<br>Unicité du développement en série entière. | |
| Développements usuels dans le domaine réel. | Les élèves doivent connaître les développements en série entière en 0 des fonctions $t \mapsto e^{ta}$ $(a \in \mathbb{C})$, $t \mapsto \sinh t$, $t \mapsto \cosh t$, $t \mapsto \sin t$, $t \mapsto \cos t$, $t \mapsto \arctan t$, $t \mapsto \ln(1+t)$, $t \mapsto (1+t)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.<br>Ils doivent également être capables de déterminer un développement en série entière à l'aide d'une équation différentielle. |

# Seconde période

## 1 Espaces préhilbertiens réels. Endomorphismes d'un espace euclidien

L'objectif de cette section est triple :

- consolider les acquis de première année PCSI concernant les espaces préhilbertiens réels et les espaces euclidiens, en généralisant les outils de géométrie vectorielle euclidienne du plan et de l'espace à des dimensions quelconques ;
- étudier les isométries vectorielles et les matrices orthogonales, notamment dans le cas des dimensions 2 et 3 en insistant sur les représentations géométriques ;
- approfondir, dans le cadre euclidien, la thématique de la réduction des endomorphismes, à travers l'étude des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques, en énonçant les formes géométrique et matricielle du théorème spectral ;
- introduire la notion d'endomorphisme autoadjoint positif, notamment en vue de l'optimisation au second ordre en calcul différentiel.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- maîtrisent les notions de bases sur le produit scalaire, sachent orthogonaliser une famille libre (indexée par une partie de $\mathbb{N}$) d'un espace préhilbertien au moyen de l'algorithme de Gram-Schmidt, et soient capables d'exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie (théorème de la projection orthogonale, existence de la meilleure approximation quadratique) ;
- maîtrisent, dans le cas euclidien, les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs, endomorphismes autoadjoints, isométries vectorielles) et le point de vue matriciel.

*Les espaces préhilbertiens considérés dans cette section sont réels. Toute notion sur les espaces préhilbertiens complexes est hors programme. La notion d'adjoint d'un endomorphisme est hors programme.*

### 1.1 Rappels sur les produits scalaires

| | |
|---|---|
| Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens. | Notations $\langle x, y\rangle$, $(x \mid y)$, $x \cdot y$. |
| Exemples de référence : produit scalaire euclidien | Expressions $xy^\top$, $\mathrm{tr}(A^\top B)$. |

| | |
|---|---|
| canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, produits scalaires définis par une intégrale sur les espaces de fonctions continues. | Application géométrique dans le cas du produit scalaire usuel du plan ou de l'espace, équations de plans et de droites. |
| Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. | |
| Norme associée à un produit scalaire, cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire. | Les élèves doivent savoir manipuler les identités remarquables sur les normes (développement de $\|u \pm v\|^2$, identité de polarisation, …). |

## 1.2 Orthogonalité

| | |
|---|---|
| Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel $F$, d'une partie $X$. Familles orthogonales, orthonormales (ou orthonormées). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. | Rappels de première année PCSI.<br>Notation $F^\perp$, $X^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace vectoriel. |
| Suites orthonormales $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. | Exemples de suites orthonormales dans l'espace des polynômes, dans l'espace des fonctions continues $T$-périodiques, etc. |
| Théorème de Pythagore. | |
| Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. | Application au calcul d'une base orthonormée de polynômes pour différents produits scalaires. |
| Existence de bases orthonormales dans le cas euclidien. Théorème de la base orthonormale incomplète. | Expression $X^\top Y$ du produit scalaire de deux vecteurs $x$ et $y$ de coordonnées $X$ et $Y$ dans une base orthonormale. |
| Expression des coordonnées d'un vecteur, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale. | Les élèves doivent savoir calculer, à l'aide du produit scalaire, les coefficients de la matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormale. |

## 1.3 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

| | |
|---|---|
| Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel $F$ de dimension finie. | Rappels de première année PCSI.<br>En dimension finie : dimension de $F^\perp$, vecteur normal à un hyperplan. |
| Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel $F$ de dimension finie, notée $p_F$. | Les élèves doivent savoir déterminer $p_F(x)$ en calculant son expression dans une base orthonormale de $F$ ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité du vecteur $x - p_F(x)$ aux vecteurs d'une base (ou à défaut d'une famille génératrice) de $F$. |
| Distance d'un vecteur $x$ à un sous-espace vectoriel $F$ de dimension finie ; caractérisation métrique du projeté orthogonal : le projeté orthogonal de $x$ sur $F$, noté $p_F(x)$, est l'unique élément de $F$ qui minimise la distance de $x$ à $F$. | Notation $d(x,F)$.<br>$\|x - p_F(x)\| = \min\limits_{y\in F} \|x-y\|$.<br>Application à l'approximation d'une fonction par des polynômes au sens de la norme en moyenne quadratique. |
| Inégalité de Bessel : pour tout $x \in E$, $$\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|.$$ | Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale, alors, pour tout $x \in E$, la suite $(\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable et on a $$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle^2 \leqslant \|x\|^2.$$ |
| En dimension finie, projeté orthogonal d'un vecteur $x$ sur l'hyperplan $\mathrm{vect}(u)^\perp$ ; distance de $x$ à | Applications géométriques à des calculs de distances. |

vect$(u)^{\perp}$.

Les élèves doivent savoir calculer la distance d'un vecteur à un hyperplan, la distance d'un vecteur à une droite.

## 1.4 Formes linéaires sur un espace euclidien

Théorème de représentation : pour toute forme linéaire $\varphi$ sur $E$, il existe un et un seul vecteur $x$ tel que, pour tout $y \in E$, $\varphi(y) = \langle x, y \rangle$.

Isomorphisme canonique entre $E$ et l'espace vectoriel des formes linéaires sur $E$.

## 1.5 Matrices orthogonales

Matrice orthogonale : définition par $A^{\top}A = I_n$ ; caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.

Interprétation comme matrice de changement de base orthonormée.
Matrices orthogonalement semblables.

Groupe orthogonal.

Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Déterminant d'une matrice orthogonale. Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte. Groupe spécial orthogonal.

Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.

Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie. Pour $E$ euclidien, base orthonormée directe.

Si $e$ et $e'$ sont deux bases orthonormées directes (b.o.n.d.) de $E$, égalité des applications $\det_e$ et $\det_{e'}$.

## 1.6 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Isométries vectorielles d'un espace euclidien : définition par la linéarité et la conservation des normes.

On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal » tout en lui préférant « isométrie vectorielle ».

Exemples : symétrie orthogonale, réflexion.

Caractérisation des isométries vectorielles de $E$ parmi les endomorphismes de $E$ : par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une (de toute) base orthonormée ; caractérisation d'une isométrie à l'aide de la matrice associée dans une (toute) base orthonormale.

Lien entre les notions de base orthonormale, d'isométrie et de matrice orthogonale : une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si, et seulement si, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé est une isométrie vectorielle ; changement de base orthonormale.

Groupe orthogonal.

Notation $\mathrm{O}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Déterminant d'une isométrie ; déterminant d'une réflexion. Isométrie directe ou positive (rotation), indirecte ou négative.

Caractérisation d'une rotation par l'image d'une (de toute) base orthonormée directe.

Groupe spécial orthogonal.

Notation $\mathrm{SO}(E)$.

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.

Si le sous-espace $F$ est stable par l'isométrie $u$, alors $F^{\perp}$ est aussi stable par $u$.

## 1.7 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

| | |
|---|---|
| Description des matrices orthogonales directes et indirectes de taille 2. | $\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a\end{pmatrix};\ a, b \in \mathbb{R},\ a^2+b^2=1\right\}$ ; $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix};\ a, b \in \mathbb{R},\ a^2+b^2=1\right\}$. |
| Matrice de rotation $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ associée à un nombre réel $\theta$. | $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta);\ \theta \in \mathbb{R}\}$. Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif. |
| Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté : matrice dans une base orthonormée directe d'une rotation, mesure de l'angle d'une rotation. | La matrice d'une rotation dans une b.o.n.d. est indépendante de la b.o.n.d. choisie. On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs. |
| Classification des isométries d'un plan euclidien. | Dans un plan euclidien $E$, toute isométrie est soit une réflexion, soit une rotation ; décomposition d'une rotation en produit de deux réflexions dont l'une est choisie arbitrairement. |

## 1.8 Isométries d'un espace euclidien de dimension 3

| | |
|---|---|
| Description des matrices de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. | |
| Rotation vectorielle d'un espace euclidien orienté de dimension 3 ; matrice dans une base adaptée. | Axe et mesure de l'angle d'une rotation $u$ : $1 \in \mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$ et il existe une base orthonormée de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ vaut soit $I_3$ soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. |

## 1.9 Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

| | |
|---|---|
| Endomorphisme autoadjoint. | Notation $\mathcal{S}(E)$. L'endomorphisme $u$ est dit autoadjoint si, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$. |
| Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. | Si $u$ est autoadjoint, alors l'orthogonal d'un sous-espace stable par $u$ est aussi stable par $u$. |
| Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint par sa matrice en base orthonormée : l'endomorphisme $u$ est autoadjoint si, et seulement si, sa matrice dans une (toute) base orthonormée est symétrique. | La terminologie « endomorphisme symétrique » sera mentionnée tout en lui préférant « endomorphisme autoadjoint ». |
| Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints. | Si $p$ est un projecteur de $E$ euclidien, alors $p$ est autoadjoint si, et seulement si, $p$ est une projection orthogonale, ie $\operatorname{Im} p = (\operatorname{Ker} p)^\perp$. |
| Théorème spectral : un endomorphisme $u$ d'un espace euclidien $E$ est autoadjoint si, et seulement s'il est diagonalisable dans une base orthonormée si, et seulement si, $E$ est somme orthogonale des sous-espaces propres de $u$. | La démonstration n'est pas exigible. En particulier, si $u$ est autoadjoint alors son polynôme caractéristique $\chi_u$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et $E$ est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de $u$. |
| Traduction matricielle du théorème spectral. | Une matrice carrée réelle est symétrique si, et seulement si, elle est orthogonalement diagonalisable. |
| Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. | Un endomorphisme autoadjoint $u$ est dit positif (resp. défini positif) si pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle \geqslant 0$ (resp. pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\langle u(x), x\rangle > 0$). |

| | |
|---|---|
| | Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$. |
| Caractérisation spectrale. | Un endomorphisme autoadjoint est positif (resp. défini positif) si, et seulement si, ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives). |
| Matrice symétrique positive, définie positive. | Notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. |
| Caractérisation spectrale. | Une matrice carrée, réelle et symétrique est positive (resp. définie positive) si, et seulement si, ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives). |



## 2 Intégrales dépendant d'un paramètre

L'objectif de cette section est double :

- étudier les suites et les séries de fonctions intégrables, grâce au théorème de convergence dominée et le théorème d'intégration terme à terme d'une séries de fonctions ;
- appliquer les résultats obtenus à l'étude des fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre (théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe $\int$).

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves connaissent ces théorèmes et soient en mesure de les exploiter notamment pour mener l'étude de fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre ; cette exploitation suppose en particulier la capacité à en vérifier les conditions d'application en insistant d'abord sur les hypothèses importantes (hypothèse de domination , hypothèse de convergence, hypothèse d'intégrabilité, …) mais pas autant sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration.

Il est recommandé de privilégier ici l'étude d'exemples significatifs (intégrales eulériennes, transformées de Fourier, transformées de Laplace, …) en évitant les situations artificielles et les exercices de pure virtuosité technique.

Les fonctions considérées ici sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des nombres réels ou celui des nombres complexes.

### 2.1 Passage à la limite sous l'intégrale

*Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothses de convergence simple et de domination (resp. convergences de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à la variable d'intégration.*

| | |
|---|---|
| **Théorème de convergence dominé :** Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur $I$ et à valeurs complexes. Si $(f_n)_n$ converge simplement sur $I$ vers une fonction $f$ continue par morceaux sur $I$ et s'il existe une fonction $\varphi$ continue par morceaux, positive et intégrable sur $I$, telle que pour tout entier $n$, $\lvert f_n\rvert \leqslant \varphi$ ( hypothèse de domination), alors les fonctions $f_n$ et $f$ sont intégrables sur $I$ et $\lim_n \int_I f_n = \int_I f$. | La démonstration de ce théorème est hors programme. Les hypothèses de domination et de convergence simple sont plus importantes que l'hypothèse de continuité par morceaux de $f$ ; cette dernière étant imposée par les limitations du programme. |
| **Inégration terme à terme d'une séries de fonctions :** Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions complexes continues par morceaux et intégrables sur $I$ telle que la série $\sum\limits_n f_n$ converge simplement sur $I$ vers une | La démonstration est hors programme. Les hypothèses de convergence simple et de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\int_I \lvert f_n\rvert\right)$ sont plus impor- |

fonction $f$, continue par morceaux sur $I$, et que la série $\sum\limits_n \left(\int_I |f_n|\right)$ soit convergente. Alors, la fonction $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur $I$ et

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

tantes que l'hypothèse de continuité par morceaux de $f$.

On présentera des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

## 2.2 Continuité et dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre

*Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à $x$ et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à la variable $t$ d'intégration.*

### Théorème de continuité :

Soient $A$ une partie d'un espace vectoriel de dimension finie, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times I$ ; on suppose que $f$ est continue par rapport à $x$ et continue par morceaux par rapport à $t$. S'il existe une fonction positive $\varphi$, continue par morceaux et intégrable sur $I$, telle que, pour tout élément $(x,t)$ de $A \times I$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ (hypothèse de domination), alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $A$.

Les hypothèses de domination et de continuité par rapport à $x$ sont plus importantes que l'hypothèse de continuité par morceaux ; cette dernière étant imposée par les limitations du programme.

Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée de façon locale.

Si $A$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment contenu dans $A$, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

### Théorème de convergence dominée à paramètre continu :

Soient $A$ et $I$ des intervalles de $\mathbb{R}$, $a$ une borne de $A$ et $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$, définie sur $A \times I$ telle que :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ admet une limite $\ell(t) \in \mathbb{K}$ en $a$ ($f(x,t) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell(t)$) ;
- pour tout $x \in A$, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur $I$ ;
- il existe une fonction $\varphi$ positive, continue par morceaux et intégrable sur $I$ telle que, pour tout $(x,t) \in A \times I$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ (hypothèse de domination) ;

alors la fonction $\ell$ est intégrable sur $I$ et

$$\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to a}{\longrightarrow} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t.$$

On remarquera qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.

### Théorème de dérivation (classe $C^1$) :

Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $J \times I$. On suppose que :

- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrables sur $I$ ;
- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $C^1$ sur $J$ ;
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est

Les hypothèses de domination et de régularité de $f$ par rapport à $x$ sont plus importantes que l'hypothèse de continuité par morceaux ; cette dernière étant imposée par les limitations du programme.

Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment contenu dans $J$, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

continue par morceaux sur $I$ ;
- il existe une fonction $\varphi$ positive, continue par morceaux et intégrable sur $I$ telle que, pour tout $(x,t) \in J \times I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$ (hypothèse de domination).

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $C^1$ sur $J$ et on a la formule de Leibniz suivante :

$$\forall x \in J, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

**Extension aux fonctions de classe $C^k$ :**

Classe $C^k$ d'une intégrale dépendant d'un paramètre, sous l'hypothèse d'intégrabilité de $\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,.)$, pour tout $x$ de $J$ et tout $0 \leqslant p \leqslant k-1$, et domination sur tout segment contenu dans $J$ de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,.)$.

### 2.3 Exemples d'applications

Exemples d'emploi du théorème de convergence dominé et du théorème d'intégration terme à terme d'une séries de fonctions intégrables.

Exemples significatifs d'étude de fonctions définies comme intégrales dépendant d'un paramètre : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire.

Intégrales eulériennes, transformées intégrales (facteur d'échelle, retard, amortissement, valeur initiale ou finale, …).

## 3 Probabilités

Dans cette section, on introduit le cadre général du calcul des probabilités. Le calcul des probabilités vu en première année est trop limité pour aborder les problèmes intéressants et autoriser des variables aléatoires non bornées par exemple. Le vocabulaire usuel est proposé, partant de la notion fondamentale d'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ; il ne s'agit pas d'étudier les problèmes théoriques sous-jacents à cette axiomatisation mais seulement de pouvoir disposer d'un cadre simple permettant d'effectuer les calculs et les raisonnements nécessaires lors de l'étude de phénomènes où le hasard intervient.

Cette extension est effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour les exemples et exercices ; l'objectif est en effet de renforcer la compréhension de l'aléatoire, en lien avec d'autres parties du programme. On pourra ainsi faire travailler les élèves sur divers objets aléatoires (permutations, graphes, matrices …) les inégalités de concentration et des exemples de processus à temps discret (marches aléatoires, chaînes de Markov …).

Les problèmes, les exemples, les sujets traités lors de travaux dirigés doivent tenir compte de cet objectif de simplicité. L'utilisation de l'informatique est fortement recommandée pour illustrer les situations probabilistes, pour simuler des variables aléatoires et expérimenter sur des problèmes réels correctement modélisés.

On notera que ce cadre général conduit à des problèmes de convergence (suites, séries, familles sommables, intégrales) et qu'il est important de rappeler, au moment opportun, les résultats du cours d'analyse correspondants.

La section est organisée autour des axes suivants :

- consolider les acquis de première année PCSI sur les variables aléatoires discrètes finies et la compléter par l'étude des variables aléatoires discrètes infinies et des variables à densité ;
- introduire les notions de fonction de répartition, de moments et de fonction génératrice, et familiariser les élèves avec ces notions en mettant en oeuvre les définitions et résultats du cours sur des exemples simples ;
- étudier des exemples usuels de lois discrètes réelles (loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique, loi de Poisson, ...) et de lois à densité sur $\mathbb{R}$ (loi uniforme, loi exponentielle, loi gamma, loi gaussienne (ou normale), ...) ;
- étudier la notion de convergence et quelques théorèmes limites.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- aient étudié des exemples usuels de lois discrètes réelles et de lois à densité ;
- sachent reconnaître les situations classiques de modélisation par des lois discrètes ou à densité usuelles ;
- sachent utiliser les fonctions génératrices pour déterminer la loi ou calculer les moments d'une variable aléatoire discrète dans des cas standard ;
- soient capables de déterminer la densité d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition ;
- apprennent à utiliser le produit de convolution pour déterminer la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, discrètes ou à densité ;
- apprennent à approcher, sous certaines conditions, une loi binomiale par une loi de Poisson, et une loi hypergéométrique par une loi binomiale ;
- sachent utilisent les théorèmes limites, dans des cas standard, pour donner des estimations à certains paramètres (espérance, variance, ...).

## 3.1 Ensembles dénombrables, familles sommables

*Ce paragraphe propose une introduction de la dénombrabilité et des familles sommables, afin de poser les bases de vocabulaire, méthodes et résultats qui seront admis, et directement utilisés. Chaque professeur est libre d'en adapter le contenu au niveau de formalisme qu'il juge préférable pour ses élèves. Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.*

### 3.1.1. Ensembles dénombrables

| | |
|---|---|
| Ensemble dénombrable, au plus dénombrable. | Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$ ; il est dit au plus dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.<br>$\mathbb{Z}$ est dénombrable ; les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables. |
| Un ensemble est au plus dénombrable si, et seulement si, il est fini ou dénombrable. | |
| Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. | L'ensemble $\mathbb{N}^p$ est dénombrable pour tout entier $p \geqslant 2$. |
| Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables (resp. au plus dénombrables) est dénombrable (resp. au plus dénombrable). | L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable. |
| Soit $I$ un ensemble au plus dénombrable. Si $(F_i)_{i\in J}$ est une partition de $I$ (ce qui impose $F_i \neq \emptyset$) alors $J$ est au plus dénombrable. | Résultat admis. |

### 3.1.2. Notions sur les familles sommables de complexes

*Les familles considérés ici sont toutes indexées par un ensemble au plus dénombrable.*

#### Familles sommables de nombres réels positifs

| | |
|---|---|
| Somme d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de l'intervalle $[0,+\infty]$, définie comme étant la borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble des sommes finies $\sum\limits_{i\in F} u_i$ quand $F$ décrit l'ensemble des parties finies de $I$. | La somme est notée $\sum\limits_{i\in I} u_i$. Cas où $I$ est fini : la définition est cohérente. Cas où $I=\mathbb{N}$ : lien avec les séries ; si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ diverge, il est pratique d'écrire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$. |
| Invariance de la somme par permutation de $I$. | Si $\sigma : I \to I$ est une bijection, alors les familles $(u_i)_{i\in I}$ et $(u_{\sigma(j)})_{j\in I}$ ont la même somme : $$\sum_{j\in I} u_{\sigma(j)} = \sum_{i\in I} u_i.$$ |
| La famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ est dite sommable si $\sum\limits_{i\in I} u_i < +\infty$ ; cela revient à dire qu'il existe $M>0$ tel que, pour toute partie finie $F$ de $I$, on ait $0 \leqslant \sum\limits_{i\in F} u_i \leqslant M$. | On souligne que les calculs sont justifiés par la seule positivité et qu'ils fournissent un moyen d'étudier la sommabilité. |
| Critère de comparaison. | Si $0 \leqslant u_i \leqslant v_i$, pour tout $i\in I$, alors :<br>– la sommabilité da la famille $(v_i)_{i\in I}$ entraîne celle de $(u_i)_{i\in I}$ et on a $0 \leqslant \sum\limits_{i\in I} u_i \leqslant \sum\limits_{i\in I} v_i$.<br>– la non sommabilité de la famille $(u_i)_{i\in I}$ entraîne la non sommabilité de $(v_i)_{i\in I}$. |
| Opérations : somme, multiplication par un réel positif. | |
| *Théorème de sommation par paquets :* si $I$ est réunion disjointe des $I_j$ pour $j\in J$, et si $(u_i)_{i\in I}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors $\sum\limits_{i\in I} u_i = \sum\limits_{j\in J}\Big(\sum\limits_{i\in I_j} u_i\Big)$. | La démonstration est hors programme. |
| Cas où $I$ est un produit : théorème de Fubini positif. | Cas des suites doubles ($I=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$) : interversion des sommations. |

#### Familles sommables de nombres complexes

| | |
|---|---|
| Famille sommable de nombres réels ou complexes. | La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite sommable si la famille $(\lvert u_i\rvert)_{i\in I}$ l'est, c'est-à-dire si $\sum\limits_{i\in I} \lvert u_i\rvert < +\infty$. |
| Somme d'une telle famille (cas réel, cas complexe). | Si la famille $(u_k)_{k\in I}$ est réelle, sa somme est définie comme étant la différence des sommes des familles, de réels positifs, composées par ses parties positive et négative : $$\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} u_k^+ - \sum_{k\in I} u_k^- ;$$ dans le cas général, sa somme est définie par $$\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} \mathrm{Re}(u_k) + i\sum_{k\in I} \mathrm{Im}(u_k).$$ |
| Lorsque $I=\mathbb{N}$, lien avec la convergence absolue de la série $\sum\limits_{n} u_n$. | La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n} u_n$ est absolument convergente, auquel |

cas $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Invariance de la sommabilité et de la valeur de la somme par permutation de l'ensemble des indices.

Si $(v_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes indexée par un ensemble (dénombrable $I$) et $\sigma : I \longrightarrow I$ une bijection, alors la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(v_{\sigma(j)})_{j\in I}$ est sommable, auquel cas $\sum_{j\in I} v_{\sigma(j)} = \sum_{i\in I} v_i$.

Critère suffisant de sommabilité : critère de comparaison.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes et soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels positifs vérifiant, pour tout $i \in I$, $|u_i| \leqslant v_i$. Alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

Espace vectoriel des familles sommables d'éléments de $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ; linéarité de la somme, inégalité triangulaire. Sous famille d'une famille sommable.

Notation $\ell^1(I)$.
Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable alors

$$\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i|.$$

*Théorème de sommation par paquets* : si $I$ est réunion disjointe des $I_j$ pour $j \in J$, et si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de complexes, alors

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right).$$

En particulier, la famille $\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ est sommable et elle a la même somme que $(u_i)_{i\in I}$.
La démonstration est hors programme.

Critère suffisant de sommabilité.

On vérifie l'hypothèse de sommabilité d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ en appliquant le théorème de sommation par paquets, énoncé pour les familles de réels positifs, à la famille $(|u_i|)_{i\in I}$.

Cas où $I$ est un produit : théorème de Fubini.

Cas des suites doubles (interversion des sommations) : si la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de complexes est sommable, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$$

qui vaut aussi la somme de la famille.

Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ sont sommables alors la famille $(u_i v_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j = \left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right).$$

Extension, sans rédaction de la démonstration, au produit d'un nombre fini de familles sommables.

## 3.2 Espaces probabilisés

Le préfixe $\sigma$ utilisé dans $\sigma$-algèbre ou $\sigma$-additif renvoie au caractère dénombrable des opérations permises. La lettre $\sigma$ est utilisée classiquement aussi pour désigner l'écart-type, racine carrée de la variance.

Tribu $\mathcal{A}$ d'événements sur un univers $\Omega$ ; espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.
événement : on appelle ainsi toute partie de $\Omega$ qui est élément de la tribu $\mathcal{A}$.
On fera remarquer aussi que choisir $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ n'est pas nécessairement une bonne solution. Ce

Le terme $\sigma$-algèbre est aussi employé. On ajoute à la notion rencontrée dans le cas fini la possibilité de réunir ou d'intersecter une famille dénombrable d'événements. Cela est indispensable pour de nombreuses raisons, par exemple : pour considérer des situations où l'on répète un jeu, sans fixer a priori choix augmente les contraintes à vérifier pour l'existence de probabilités.

un nombre maximum de répétitions, pour envisager le comportement asymptotique de probabilités …

Système complet fini ou dénombrable d'événements.

Famille finie ou dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à $\Omega$.

Tribu engendrée par un système complet fini ou dénombrable d'événements.

Existence admise.

Définition d'espace probabilisé, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Une probabilité $\mathbf{P}$ est une application $\sigma$-additive de $\mathcal{A}$ vers $[0,1]$ qui vérifie $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Propriétés de la continuité monotone séquentielle : si $(A_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite d'événements croissante (resp décroissante) pour l'inclusion alors $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k\right)$ (resp $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} A_k\right)$) est égale à $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{P}(A_k)$.

Conséquence immédiate :
pour toute suite d'événements $(B_k)_{k\geqslant 1}$ on a

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right),$$

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right).$$

Propriété de sous-additivité de $\mathbf{P}$ pour une réunion dénombrable d'événements.

Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion (resp. intersection) finie ou dénombrable d'événements négligeables (resp. presque sûrs) est un événement négligeable (resp. presque sûr).

On parle aussi d'événement quasi-certain et de propriété presque sûre. L'adjectif négligeable est utilisé pour le contraire d'une propriété presque sûre, i.e. pour un événement de probabilité 0.
On pourra donner comme exemple d'événement négligeable la réalisation d'une suite infinie de PILE lors d'un jeu de PILE ou FACE.

Notion de probabilité conditionnelle.
On obtient un nouvel espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}_A)$.

On conditionne par un événement $A$ de probabilité non nulle, on parle de probabilité sachant $A$ et on écrit $\mathbf{P}_A$ ou parfois $\mathbf{P}(\cdot \mid A)$.

Formule des probabilités composées ; formule des probabilités totales ; formule de Bayes.

Pour la formule des probabilités totales on considère un système complet d'événements en nombre fini ou dénombrable : soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements non négligeables, alors pour tout événement $B$ on a :

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)\, \mathbf{P}_{A_n}(B).$$

événements indépendants ; indépendance mutuelle d'une famille d'événements : par définition une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements est indépendante si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $i_1, \ldots, i_n$ éléments distincts de $I$, $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) = \prod\limits_{j=1}^{n} \mathbf{P}(A_{i_j})$.
Si $A$ et $B$ sont indépendants, alors $A$ et $\overline{B}$ le sont aussi ; si les événements $A_i$ sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements $B_i$, avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

Si la famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements est indépendante, alors toute sous famille est indépendante. En particulier les événements sont indépendants deux à deux. Attention l'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance mutuelle de la famille.

## 3.3 Variables aléatoires et lois de variables aléatoires

On appelle variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}.$$

Pour toute partie $A$ de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(A)$ est l'image réciproque par $X$ de $A$, c'est à dire l'ensemble des éléments $\omega$ de $\Omega$ qui vérifient $X(\omega) \in A$ ; on la note plus simplement $(X \in A)$ ou $\{X \in A\}$.
Pour $A = ]-\infty, x]$ cette image réciproque est l'ensemble des éléments $\omega$ de $\Omega$ qui vérifient $X(\omega) \leqslant x$ ; on la note plus simplement $(X \leqslant x)$ ou $\{X \leqslant x\}$.

La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ peut être introduite, mais aucun résultat concernant cette tribu n'est exigible.

Si $A$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ obtenu en opérant par passages au complémentaire, par réunions, par intersections sur une famille finie ou dénombrable d'intervalles de la forme $]-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$, et si $X$ est une variable aléatoire réelle alors $(X \in A)$ appartient à $\mathcal{A}$. Donc $\mathbf{P}(X \in A)$ a un sens.

C'est le cas, entre autres, pour tout partie $A$ qui est un intervalle réel ou le complémentaire d'un intervalle réel : savoir utiliser les relations suivantes

$$\begin{aligned}
(X \in ]a, +\infty[) &= \overline{(X \in ]-\infty, a])},\\
(X \in [a, +\infty[) &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} (X \in ]a - 1/k, +\infty[),\\
(X \in ]-\infty, a[) &= \overline{(X \in [a, +\infty[)},\\
(X \in ]a, b]) &= (X \in ]-\infty, b]) \setminus (X \in ]-\infty, a]),\\
(X \in [a, b]) &= (X \in ]-\infty, b]) \setminus (X \in ]-\infty, a[),\\
(X \in [a, b[) &= (X \in ]-\infty, b[) \setminus (X \in ]-\infty, a[),\\
(X \in ]a, b[) &= (X \in ]-\infty, b[) \setminus (X \in ]-\infty, a]).
\end{aligned}$$

Si $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ est une famille finie de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ est une application continue alors l'application composée $\omega \mapsto f(X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega))$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Notation $f(X_1, \ldots, X_k)$.
La preuve de ce résultat n'est pas au programme ; on en déduit le fait que la somme, le produit, le minimum, le maximum, … d'une famille finie de variables aléatoires réelles est une variable aléatoire réelle.

Si $X$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $f$ une application monotone de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, alors l'application composée $f \circ X$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Notation $f(X)$.
Le résultat s'étend au cas où $f$ est monotone par morceaux.

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui converge simplement vers X, une application de $\Omega$ vers $\mathbb{R}$. Alors $X$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

La preuve utilise la définition de limite et les propriétés des tribus.

On appelle loi (relativement à $\mathbf{P}$) de la variable aléatoire réelle $X$ l'application de $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ qui à tout intervalle réel J associe le nombre $\mathbf{P}(X \in J)$.

$\mathcal{I}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble de tous les intervalles de $\mathbb{R}$. C'est un sous ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

On appelle loi (relativement à $\mathbf{P}$) d'une famille finie $(X_1, \ldots, X_k)$ de variables aléatoires réelles l'application de $\mathcal{I}(\mathbb{R})^k$ vers $\mathbb{R}$ qui à tout produit cartésien

On note $(X_1 \in J_1, \ldots, X_k \in J_k)$ l'événement

$$\bigcap_{i=1}^{k} (X_i \in J_i).$$

$J_1 \times \cdots \times J_k$ d'intervalles réels associe le nombre

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}(X_i \in J_i)\right).$$

Fonction de répartition $F_X$ d'une variable aléatoire réelle $X$ : c'est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_X(t) = \mathbf{P}(X \leqslant t).$$

**Propriétés de $F_X$ :**

c'est une fonction croissante, continue à droite en tout point, de limite 0 en $-\infty$ et de limite 1 en $+\infty$.

La réciproque (au sens où toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant ces trois propriétés est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle) n'est pas au programme.

La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire réelle : la connaissance de $F_X$ permet de calculer $\mathbf{P}(X \in I)$ pour tout intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.
La continuité de la fonction $F_X$ en $t$ équivaut à $\mathbf{P}(X = t) = 0$.

On doit savoir

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \in ]a, +\infty[) &= 1 - F_X(a),\\
\mathbf{P}(X \in [a, +\infty[) &= 1 - \lim_{a^-} F_X,\\
\mathbf{P}(X \in ]-\infty, a[) &= \lim_{a^-} F_X,\\
\mathbf{P}(X \in ]a, b]) &= F_X(b) - F_X(a),\\
\mathbf{P}(X \in [a, b]) &= F_X(b) - \lim_{a^-} F_X,\\
\mathbf{P}(X \in [a, b[) &= \lim_{b^-} F_X - \lim_{a^-} F_X,\\
\mathbf{P}(X \in ]a, b[) &= \lim_{b^-} F_X - F_X(a),\\
\mathbf{P}(X = a) &= F_X(a) - \lim_{a^-} F_X.
\end{aligned}$$

On définit la fonction de répartition d'une famille finie $(X_1, \ldots, X_k)$ de variables aléatoires réelles comme étant l'application de $\mathbb{R}^k$ vers $\mathbb{R}$,

$$(t_1, \ldots, t_k) \longmapsto \mathbf{P}(X_1 \leqslant t_1, \ldots, X_k \leqslant t_k).$$

Pas de résultats théoriques au programme dans le cas de plusieurs variables.

Les résultats précédents s'étendent au cas d'une famille finie $(X_1, \ldots, X_k)$.
Deux familles de lois sont au programme : lois discrètes et lois à densité.
Une variable aléatoire réelle $X$ est dite de loi discrète (relativement à la probabilité $\mathbf{P}$) s'il existe $\Omega' \in \mathcal{A}$ de probabilité 1 tel que $D = X(\Omega')$ soit au plus dénombrable.

On peut supprimer de $D$ tous les éléments $x$ tels que $\mathbf{P}(X = x) = 0$ ; les $x$ restants sont appelées valeurs possibles de la variable discrète $X$.

On obtient

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbf{P}(X = x).$$

La loi de $X$ est caractérisée par la donnée de $D$ et de l'application $x \mapsto \mathbf{P}(X = x)$, de $D$ dans $\mathbb{R}$.

On dit que la loi de $X$ est discrète usuelle s'il existe un intervalle $J$ de $\mathbb{Z}$ et une bijection croissante

$$\varphi : J \to D,\ k \mapsto x_k.$$

L'usage est, dans ce cas, de représenter la loi de $X$ par un tableau de lignes comportant en première ligne les $x_k$, éléments de $D$, écrits en ordre crois-

Des lignes supplémentaires peuvent donner les cumuls $\sum_{j \leqslant k} p_j$ ou les produits $x_k p_k$. Il est intéressant

| | |
|---|---|
| sant, en deuxième ligne les probabilités correspondantes $p_k = \mathbf{P}(X = x_k)$. | d'utiliser un tableur. |
| Exemples premiers de lois discrètes. | Rappeler les lois vues en première année. |
| Une variable aléatoire réelle $X$ est dite de loi à densité (relativement à la probabilité $\mathbf{P}$) si sa fonction de répartition $F_X$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un sous-ensemble fini $F$ (éventuellement vide). | Une telle variable aléatoire est dite aussi de loi continue. On appelle alors densité de $X$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_X(t) = F'_X(t)$ pour $t \in \mathbb{R} \setminus F$ et $f_X(t) = 0$ pour $t \in F$. |
| La densité est une fonction positive, continue sur $\mathbb{R} \setminus F$, d'intégrale convergente et valant 1 sur $\mathbb{R}$. | Pour tout intervalle $I$ de borne inférieure $a \in \mathbb{R}$ et de borne supérieure $b \in \mathbb{R}$, on a : $$\mathbf{P}(X \in I) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$ |
| Exemples premiers de lois continues. | Loi uniforme sur un segment réel $[a, b]$, loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, loi gamma de paramètre $(\alpha, \lambda)$, lois gaussiennes. |
| Loi d'une variable aléatoire obtenue par composition. | Il s'agit d'étudier la loi de $Y = g(X)$ où $X$ est une variable aléatoire de loi connue et $g$ une fonction de la variable réelle, ou plus généralement, celle de $Y = g(X_1, \ldots, X_k)$.<br>Aucun résultat théorique général n'est au programme ; les exercices porteront sur des cas simples. |
| Une famille $(X_j)_{j\in J}$ de variables aléatoires réelles est dite indépendante si, pour toute famille $(I_j)_{j\in J}$ d'intervalles de $\mathbb{R}$, la famille $\big((X_j \in I_j)\big)_{j\in J}$ d'événements est indépendante. | On distinguera l'indépendance de la famille de variables (dite mutuelle parfois) et l'indépendance deux à deux des variables. On notera que l'indépendance d'une famille de variables est relative à une probabilité donnée. |

**Indépendance héritée (Lemme des coalitions) :**
Si la famille $(X_j)_{1\leqslant j\leqslant n_k}$ est indépendante et si $0 < n_1 < \cdots < n_k$, alors la famille

$$\Big(f_1(X_1, \ldots, X_{n_1}), f_2(X_{n_1+1}, \ldots, X_{n_2}), \ldots, f_k(X_{n_{k-1}+1}, \ldots, X_{n_k})\Big)$$

est indépendante.

| | |
|---|---|
| Existence d'espaces probabilisés portant une suite $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de lois discrètes données. | Modélisation du jeu Pile-Face répété (ou infini). |
| Loi conditionnelle de $X$ sachant un événement non négligeable $A$. | C'est $(\mathbf{P}_A)_X$ la loi de $X$ sous la probabilité $\mathbf{P}_A$. On l'utilise notamment dans le cas où $(X, Y)$ est un couple de variables aléatoires réelles discrètes et $A = (Y = t)$, $t$ réel donné. |
| Loi de la somme de variables indépendantes. | Proposer de nombreux exemples de somme de variables indépendantes. Dans certains cas, on a une propriété de stabilité : la loi de la somme est du même type. étudier notamment les cas de lois gaussiennes et de lois de Poisson. |
| Si $(X_1, X_2)$ est un couple de variables aléatoires réelles indépendantes dont les lois sont discrètes d'ensembles de valeurs possibles respectifs $D_1$ et $D_2$ (sous ensembles de $\mathbb{R}$ au plus dénombrables), | Dans ce cas, l'ensemble des valeurs possibles de $S$ est $D = \{u + v;\ (u, v) \in D_1 \times D_2\}$ et la loi de $S$ est |

alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2$ est discrète.

donnée, pour tout $s \in D$, par :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S = s) &= \sum_{u \in D_1} \mathbf{P}(X_1 = u)\, \mathbf{P}(X_2 = s - u) \\ &= \sum_{v \in D_2} \mathbf{P}(X_1 = s - v)\, \mathbf{P}(X_2 = v). \end{aligned}$$

Cette formule est appelée la convolution discrète des lois de $X_1$ et $X_2$.

Si $(X_1, X_2)$ est un couple de variables aléatoires réelles indépendantes telles que $X_1$ soit discrète, d'ensemble de valeurs possibles $D_1$, et $X_2$ soit continue, de densité $f_2$, alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2$ est à densité.

Dans ce cas, la densité de $S$ est la fonction :

$$f : s \mapsto \sum_{u \in D_1} \mathbf{P}(X_1 = u) f_2(s - u).$$

Si $(X_1, X_2)$ est un couple de variables aléatoires réelles indépendantes dont les lois sont continues, de densités respectives $f_1$ et $f_2$, alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2$ est à densité.

Dans ce cas, la de densité de $S$ est la fonction

$$f : s \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u) f_2(s - u)\, du.$$

Cette fonction est appelée le produit de convolution des densités $f_1$ et $f_2$.

## 3.4 Espérance, moments

*Il est recommandé de proposer ici de nombreux exercices sur des calculs d'espérances, de moments et de variances.*

Si $X$ est une variable aléatoire réelle de loi discrète, caractérisée par $(x_k, p_k)_k$, ou continue, de densité $f_X$, on définit l'espérance de $X$ par la formule

$$\mathbf{E}(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_k x_k\, p_k & \text{(cas discret)} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\, \mathrm{d}t & \text{(cas continu)} \end{cases}$$

sous réserve de la sommabilité (resp. l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$) de la famille $(x_k\, p_k)_k$ (resp. de la fonction $t \mapsto t\, f_X(t)$).

Espérance de variables aléatoires réelles de lois usuelles.

La sommabilité permet de donner une valeur finie qui ne dépend pas d'un ordre choisi des $x_k$ ; l'intégrabilité pour une fonction est l'analogue de la sommabilité pour une famille.

**Propriété de transfert à une variable :**

Si $X$ est une variable aléatoire réelle de loi discrète, caractérisée par $(x_k, p_k)_k$, alors la variable aléatoire $Y = g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la famille $(g(x_k)\, p_k)_k$ est sommable.

En cas de sommabilité, on a :

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_k g(x_k)\, p_k.$$

Si $X$ est une variable aléatoire réelle continue, de densité $f_X$, alors la variable aléatoire $Y = g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la fonction $t \mapsto g(t) f_X(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

En cas d'intégrabilité, on a :

$$\mathbf{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_X(t)\, \mathrm{d}t.$$

Les démonstrations de ces résultats ne sont pas exigibles dans le cas général. On pourra en revanche traiter des exemples de recherche de l'espérance de $Y = g(X)$ ; on évitera les exemples inutilement compliqués.

**Propriété de transfert à deux variables (cas discret) :**

Si $(X_1, X_2)$ est un couple de variables aléatoires réelles de loi discrète (loi conjointe caractérisée par $\big((x_i, y_j), p_{i,j}\big)_{i,j}$), alors la variable aléatoire $Y = g(X_1, X_2)$ admet une espérance si, et seulement si, la famille $\big(g(x_i, y_j)\, p_{i,j}\big)_{i,j}$ est sommable.

En cas de sommabilité, on a :

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{i,j} g(x_i, y_j)\, p_{i,j}.$$

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible dans le cas général. On traitera des exemples simples de recherche de l'espérance de $Y = g(X_1, X_2)$.
Le transfert à deux variables dans le cas continu (à densité) n'est pas au programme.

Si $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, si $Y$ admet une espérance et si $|X| \leqslant Y$ alors $X$ admet une espérance.

Résultat admis qui relève en fait de l'intégration de Lebesgue.

Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.
Espérance d'un produit de variables aléatoires réelles indépendantes, sous réserve d'existence.

Les démonstrations de ces propriétés dans le cas général sont admises. Elles peuvent être présentées dans le cas discret.

**Moments, variance, écart-type, covariance :**

Le moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de $X$ est, sous réserve d'existence, $\mathbf{E}\big(X^k\big)$.

Si la variable aléatoire réelle $X$ admet un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, alors elle admet un moment d'ordre $j$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$ ; de même la variable aléatoire réelle $X + \alpha$ admet un moment d'ordre $k$, pour tout réel $\alpha$.

Si la variable aléatoire réelle $X$ admet un moment d'ordre 2, on appelle variance de $X$ la quantité $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\big((X - \mathbf{E}(X))^2\big)$ et écart-type de $X$ la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Dans ce cas on a :
- $\mathbf{V}(X) \geqslant 0$ et $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\big(X^2\big) - (\mathbf{E}(X))^2$ ;
- $\mathbf{V}(X) = 0 \Leftrightarrow X$ est constante presque partout ;
- $\mathbf{V}(X + \alpha) = \mathbf{V}(X)$, pour tout réel $\alpha$.

Si $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2, alors :
- la variable aléatoire $XY$ admet une espérance et $\mathbf{E}(XY)^2 \leqslant \mathbf{E}\big(X^2\big)\, \mathbf{E}\big(Y^2\big)$ (Cauchy-Schwarz) ;
- $S = X + Y$ admet un moment d'ordre 2 et sa variance $\mathbf{V}(S)$ est donnée par la formule ci-contre.

$\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\,\mathbf{E}\big((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))\big)$.

Si $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2, on définit la covariance du couple $(X, Y)$ par la formule

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(X, Y) &= \mathbf{E}\big((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))\big)\\ &= \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y).\end{aligned}$$

Avec cette notation on obtient

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\, \mathbf{Cov}(X, Y).$$

Si $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2 et si ces variables sont indépendantes, leur covariance est nulle.

La variance de la somme est alors la somme des variances.
La réciproque est fausse : covariance nulle n'implique pas indépendance.

Corrélation linéaire : si $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2 de lois non certaines (i.e. variances non nulles), on définit le coefficient de corrélation linéaire du couple $(X, Y)$ par la formule

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Le coefficient de corrélation linéaire du couple $(X, Y)$ est un élément de l'intervalle $[-1, 1]$.
Le cas $\rho = 1$ équivaut à $Y = \alpha X$ avec $\alpha > 0$,
le cas $\rho = -1$ équivaut à $Y = \alpha X$ avec $\alpha < 0$.
L'indépendance de $X$ et $Y$ implique $\rho = 0$, la réciproque est fausse.

Si $X$ admet un moment d'ordre 1, on appelle variable centrée associée à $X$ la variable aléatoire réelle $\widetilde{X} = X - \mathbf{E}(X)$.
Si $X$ admet un moment d'ordre 2, on appelle variable centrée réduite associée à $X$ la variable aléatoire réelle $X^* = \frac{1}{\sigma(X)}(X - \mathbf{E}(X))$.

## 3.5 Fonctions génératrices

Fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ :

$$G_X(t) = \mathbf{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)\, t^k.$$

La série entière définissant $G_X$ est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et $G_X(1) = 1$ ; cette série converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1.
La fonction $G_X$ est continue sur [-1,1] et est de classe $C^\infty$ sur $]-1, 1[$.

La loi de $X$ est caractérisée par $G_X$ (pour $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$).

On pourra présenter la notion de transformée de Laplace-Fourier dans le cas d'une loi à densité mais aucun résultat n'est au programme concernant ces transformations.

Lien entre fonction génératrice et moments : la variable aléatoire $X$ admet une espérance si, et seulement si, $G_X$ est dérivable en 1, auquel cas $\mathbf{E}(X) = G'_X(1)$ ; la variable aléatoire $X$ admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, $G_X$ admet une dérivée seconde en 1, auquel cas $\mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X) = G''_X(1)$.

Les élèves doivent savoir retrouver l'expression de la variance de $X$ à l'aide de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.
Les élèves doivent savoir calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Expression de la fonction génératrice de la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ quand les $X_i$ sont indépendantes.

## 3.6 Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites

**Inégalité de Markov :**

Si $X$ est une variable aléatoire réelle positive admettant une espérance, alors, pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathbf{P}(X \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\mathbf{E}(X)}{\alpha}.$$

Cette inégalité permet de démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

**Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :**

Si $X$ est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2, alors, pour tout $\beta > 0$,

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \beta) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\beta^2}.$$

Interprétation : la variance permet de contrôler l'écart entre $X$ et sa valeur moyenne $\mathbf{E}(X)$.

**Inégalité de Jensen :**

Si $X$ est une variable aléatoire réelle admettant une espérance, si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application convexe sur $\mathbb{R}$ et si $Y = f(X)$ admet une espérance, alors

$$f(\mathbf{E}(X)) \leqslant \mathbf{E}(f(X)).$$

Démonstration uniquement dans le cas où la loi de $X$ est discrète.

Définition de la convergence en probabilité d'une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires réelles vers une variable aléatoire réelle $Y$ :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(|Y - X_n| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

Si la suite de fonctions $(f_k)_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $g$, la suite de variables aléatoires réelles $(f_k(X))_k$ converge en probabilité vers $g(X)$.

Définition de la convergence en loi d'une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires réelles vers une variable aléatoire réelle $Y$ :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus D_Y, \quad \lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(t) = F_Y(t),$$

où $D_Y$ désigne l'ensemble des points de discontinuité de la fonction $F_Y$.

En fait la limite d'une convergence en loi est la loi de $Y$.

Si les variables aléatoires $X_n$ ainsi que $Y$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, la convergence en loi de la suite $(X_n)_n$ vers $Y$ équivaut à :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(Y = k).$$

Exemple à connaître : soit $\lambda > 0$ et soit $(p_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs telle que la suite $(np_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\lambda$ ; si, pour tout $n \geqslant 1$, $X_n$ est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre $(n, p_n)$ alors la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda$.
Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.

La convergence en probabilité implique la convergence en loi. La réciproque est fausse.

Résultat admis.

**Loi faible des grands Nombres :**
si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2, alors la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)_{n\geqslant 1}$, de variables aléatoires, converge en probabilité vers la variable constante $\mu = \mathbf{E}(X_1)$.

Application : interprétation fréquentiste de $\mathbf{P}(A)$.

**Théorème de la limite centrée :**
si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2, alors la suite $\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu\right)\right)_{n\geqslant 1}$, où $\mu = \mathbf{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, converge en loi vers la variable aléatoire suivant la loi gaussienne standard.

la vitesse de convergence de la loi des grands nombre est donc en $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
Ce théorème admet de nombreuses applications, notamment en statistiques ; elles ne sont pas au programme.

## 4 équations différentielles linéaires

Cette section a pour objectifs d'étudier les équations différentielles linéaires. Elle est organisée autour des axes suivants :

- introduire quelques notions de base sur les équations différentielles linéaires et familiariser les élèves avec ces notions en mettant en oeuvre les résultats du cours sur des exemples simples ;
- étudier les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 et 2 ;
- étudier les systèmes d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 à coefficients constants, en relation avec la réduction des matrices.

La résolution explicite des systèmes linéaires à coefficients constants n'est pas un objectif du programme. On limitera en conséquence la technicité des exercices d'application.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- aient pratiqué, sur des exemples, l'étude d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 et notamment la recherche de solutions développables en série entière ainsi que les problèmes de raccordements de solutions ;
- aient pratiqué, sur des exemples, la résolution d'un système différentiel linéaire à coefficients constants du type $X' = AX$, où $A$ est une matrice à coefficients réels ou complexes, par réduction de $A$ à une forme diagonale (ou triangulaire en dimension $\leqslant 3$).

*Dans ce qui suit, $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*



## 4.1 équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2

| | |
|---|---|
| équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1, résolues en $y'$ : elles sont du type $$y' + a(x)y = b(x),$$ où $a$ et $b$ sont des fonctions continues sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. | Rappels de première année PCSI : les solutions de l'équation homogène associée sont du type $x \longmapsto \lambda e^{-A(x)}$, où $A$ est une primitive de $a$ sur l'intervalle $I$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. |
| Méthode de variation de la constante pour la résolution de l'équation (1). | Expression intégrale des solutions de l'équation complète. |
| Équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients continus, résolues en $y''$. Équation différentielle homogène associée. | Elle est de la forme : $$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t),$$ où $a$, $b$ et $c$ sont continues de $I$ dans $\mathbb{K}$. |
| Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène. | Recherche de solutions particulières polynomiales ou développables en série entière. La résolution explicite doit comporter des indications. |
| Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution globale d'un problème de Cauchy associé à l'équation $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$. | La démonstration est hors programme. |
| Espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle homogène associée, dimension. | |
| Résolution complète par abaissement de l'ordre dans le cas où une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas sur $I$ est connue. | Toutes les indications utiles doivent être fournies. |
| Exemples d'équations scalaires d'ordre 1 (resp. 2) non résolues en $y'$ (resp. $y''$) : $$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$$ $$a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = d(t).$$ | Les élèves doivent savoir exploiter la recherche de solutions développables en série entière. Exemples d'étude de problèmes de raccordements de solutions. |

## 4.2 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

| | |
|---|---|
| Système différentiel linéaire homogène à coefficients constants. | Il est de la forme $X' = AX$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. |
| Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. | Démonstration hors programme. |

| | |
|---|---|
| Structure de l'ensemble des solutions. | Espace vectoriel des solutions d'un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants, dimension |
| Étude lorsque $A$ est une matrice diagonalisable. | Exemples d'étude du comportement asymptotique des solutions en fonction du spectre de $A$. |
| Exemples de calculs explicites de solutions. | On se limite aux deux cas : $A$ diagonalisable ou trigonalisable et $n \leqslant 3$. |
| Équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre $n$ à coefficients constants. | Elle est de la forme $$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$ où $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. |
| Représentation d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre $n$, à coefficients constants, par un système différentiel linéaire linéaire à coefficients constants. | Les élèves doivent savoir écrire une telle équation sous la forme d'un système différentiel $X' = AX$. |
| Solution d'une telle équation, problème de Cauchy associé. | |
| Cas particulier des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 homogènes à coefficients constants. | Lien avec la forme des solutions d'une équation scalaire d'ordre 2 étudiée en première année PCSI. |

# 5 Calcul différentiel

L'objectif de cette section est de généraliser et d'approfondir les notions de base du calcul différentiel d'une variable et celles sur les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, déjà vues en première année PCSI. Ce qui permet d'étendre ces notions aux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et de mettre en place des outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie : problèmes d'extremums, résolution d'équations aux dérivées partielles, étude locale des courbes et des surfaces.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- sachent vérifier si une fonction est de classe $C^k$, $k \in \{1, 2\}$, et en calculer les dérivées partielles ;
- soient en mesure de déterminer les points critiques d'une fonction, si elle en admet, et en rechercher les extremums locaux ou globaux ;
- soient capables d'appliquer les résultats du calcul différentiel notamment pour déterminer les vecteurs tangents au graphe d'une fonction de deux variables ou à une surface d'équation $f(x, y, z) = 0$, et préciser le plan tangent à une surface définie par une équation cartésienne $z = \varphi(x, y)$ ;
- soient initiés à la résolution d'équations aux dérivées partielles à travers l'étude d'exemples simples ;
- soient capables d'exploiter les résultats de la théorie des fonctions pour l'étude de problèmes numériques (majorations d'expressions, problèmes d'optimisation, solutions d'équations, ...).

*Les applications $f$ considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles. On se limite en pratique au cas $n \leqslant 3$.*

## 5.1 Fonctions de classe $C^1$

| | |
|---|---|
| Dérivée de $f$ au point $a$ selon le vecteur non nul $v$. | Notations $\mathrm{D}_v f(a)$, $\mathrm{D}_v f$. |
| Dérivées partielles d'ordre 1 en un point $a$ d'une fonction définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs | Notations $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ et $\partial_j f(a)$. |

| | |
|---|---|
| réelles. | |
| Fonction de classe $C^1$ sur $U$. | Une fonction est dite de classe $C^1$ sur $U$ si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur $U$. |
| Opérations sur les fonctions de classe $C^1$. | |
| Une fonction $f$ de classe $C^1$ sur $U$ admet en tout point $a$ de $U$ un développement limité d'ordre 1. Une fonction de classe $C^1$ sur $U$ est continue sur $U$. | Démonstration non exigible. |
| Différentielle de $f$ en $a$. | Elle est définie comme l'application linéaire $df(a)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ (forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$) $$(h_1,\dots,h_n)\mapsto\sum_{i=1}^n h_i\partial_i f(a)=\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$ Notation $df(a).h$. |
| Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications de classe $C^1$ sur $U$. | $d(\lambda.f+g)(a)=\lambda.df(a)+dg(a)$. |
| Différentielle de l'application $$F:(x,y)\mapsto f(x)g(y)$$ où $f$ et $g$ sont deux applications de classe $C^1$. | $\mathrm{d}F(a,b).(h,k)=g(b)\,\mathrm{d}f(a).h+f(a)\,\mathrm{d}g(b).k$. |
| Cas particuliers : différentielle de la restriction à un ouvert d'une application constante, d'une application linéaire. | |

## 5.2 Composition d'applications de classe $C^1$ : règle de la chaîne

| | |
|---|---|
| Dérivée de $t\mapsto f(x_1(t),\dots,x_n(t))$, dérivée le long d'un arc $\gamma$. | Si $\gamma:I\longrightarrow\mathbb{R}^n$ est dérivable en $t$, $\gamma(I)\subset U$ et $f$ de classe $C^1$ sur $U$, alors l'application $f\circ\gamma:I\longrightarrow\mathbb{R}$ est dérivable en $t$ et $(f\circ\gamma)'(t)=df(\gamma(t)).\gamma'(t)$. Interprétation géométrique en termes de tangentes. |
| Application au calcul des dérivées partielles d'une composée d'applications de classe $C^1$ ( règle de la chaîne) : si $f$ et $x_1,\dots,x_m$ sont de classe $C^1$, calcul des dérivées partielles de l'application : $$(u_1,\dots,u_m)\mapsto f\big(x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_n(u_1,\dots,u_m)\big).$$ | En pratique, on se limite à $n\leqslant 3$ et $m\leqslant 3$. Les élèves doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires. Si $F:(u,v)\mapsto f\big(x(u,v),y(u,v)\big)$, alors les règle de la chaîne (chain rule) donnant les dérivées partielles de $F$ s'écrivent : $$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v);$$ $$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v).$$ |

## 5.3 Vecteur gradient

| | |
|---|---|
| Dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique $(.\|.)$, gradient en $a\in U$ d'une application numérique $f$ de classe $C^1$ sur $U$. | Le gradient est défini par ses coordonnées. Notation $\nabla f(a)$ ; égalité : $df(a).h=(\nabla f(a)\|h)$. |

## 5.4 Applications géométriques

| | |
|---|---|
| Courbe du plan définie par une équation $f(x,y)=0$, avec $f$ de classe $C^1$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$. | Ligne (ou courbe) de niveau de $f$ : si $c\in\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{A}=\{(x,y)\in U;\ f(x,y)=c\}$ est appelé la ligne de niveau de $f$ définie par l'équation $f(x,y)=c$. |
| Point régulier. équation de la tangente en un point régulier : en un point où il est non nul, le gradient de $f$ est orthogonal aux lignes de niveau $f(x,y)=\lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de $f$. | On admet l'existence d'un paramétrage local de classe $C^1$.<br>Détermination d'une équation de la tangente à la courbe en un point régulier. |
| Surface définie par une équation $f(x,y,z)=0$, avec $f$ de classe $C^1$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^3$. | |
| Point régulier. Plan tangent à une surface en un point régulier défini comme le plan orthogonal au gradient et passant par le point. | Équation cartésienne. |
| Courbes tracées sur une surface. | Cas particulier des courbes coordonnées d'une surface d'équation $z=g(x,y)$. |
| Tangentes aux courbes régulières de classe $C^1$ tracées sur la surface. | Dans le cas d'une courbe régulière, la tangente à la courbe est incluse dans le plan tangent à la surface. |

## 5.5 Applications de classe $C^2$

| | |
|---|---|
| Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. | Notations $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\partial_{i,j} f$. |
| Fonction de classe $C^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . | Une fonction est dite de classe $C^2$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ si ses dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues sur $U$. |
| Théorème de Schwarz. | Démonstration hors programme. |
| Opérations algébriques sur les fonctions de classe $C^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. | |
| Matrice hessienne en un point $a$ d'une fonction $f$ réelle de classe $C^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. | Notation $H_f(a)$ ; la matrice hessienne est symétrique réelle d'ordre $n$. |
| Formule de Taylor-Young à l'ordre 2, au voisinage d'un point $a$, pour une fonction réelle de classe $C^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ : | La démonstration est hors programme. |

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \langle \nabla f(a) \mid h\rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(a).h \mid h\rangle + o_{h\to 0}(\|h\|^2),\\ &= f(a) + (\nabla f(a))^{\top} h + \frac{1}{2}\, h^{\top} H_f(a) h + o_{h\to 0}(\|h\|^2). \end{aligned}$$

| | |
|---|---|
| Exemples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre : équation du transport, équation de la diffusion thermique, équation de propagation. | |
| Pour l'étude d'équations aux dérivées partielles, les élèves doivent savoir exploiter les techniques de changements de variables : transformations affines, passage en coordonnées polaires. | La notion de difféomorphisme est hors programme, l'expression des solutions en fonction des variables initiales n'est pas exigée. |

## 5.6 Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Extremum local, global.

Point critique d'une fonction de classe $C^1$.

Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur.

Si une fonction $f$ de classe $C^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ admet un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique de $f$.

Si $f$ est une fonction réelle de classe $C^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si $f$ admet un minimum local en $a$, alors $a$ est point critique de $f$ et $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

En particulier, si $a$ est point critique de $f$ et si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors $f$ ne présente pas de minimum local en $a$.
Adaptation au cas d'un maximum local.

Si $f$ est une fonction de classe $C^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si $a$ est point critique de $f$ et si $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $f$ atteint un minimum local strict en $a$.

Adaptation au cas d'un maximum local.
Explicitation pour $n = 2$ à l'aide de la trace et du déterminant.
Avec les notations de Monge, si $n = 2$ et si $H_f(a)$ est de rang 2, on obtient un extremum local si $rt - s^2 > 0$ et un point-col (ou point-selle) si $rt - s^2 < 0$.

Exemples de recherche d'extremums locaux.
Exemples de recherche des extremums globaux sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$.

# RELECTURE

PROGRAMME DE LA MATIÈRE

# Physique



## 1 Préambule

### 1.1 Objectifs de formation en physique

La réforme du programme de physique de la classe de PSI est rendue nécessaire par l'évolution des contextes scientifiques, technique et pédagogique sur le plan international. Elle permettra de réduire le décalage croissant entre la physique enseignée et la physique pratiquée telle qu'elle se manifeste en permanence via ses applications technologiques et numériques. Elle s'appuie sur les acquis déjà travaillées au secondaire qualifiant et en classe de PCSI. Le programme de physique de la filière PSI vise à préparer les élèves de la deuxième année de classe préparatoire aux différents concours et à apporter les connaissances fondamentales indispensables à la formation générale d'un futur, ingénieur, enseignant ou chercheur.

La physique est une science à la fois théorique et expérimentale. Elle permet de découvrir l'Univers de l'infiniment petit jusqu'à l'infiniment grand en passant par les échelles intermédiaires de la vie de tous les jours. Son enseignement s'appuie sur une approche théorique mathématisée de la discipline et vise à élaborer des modèles, des plus simples aux plus complexes, qui seront confrontés à l'expérience. Ces deux composantes de la démarche scientifique s'enrichissent mutuellement et de façon cohérente. La formation dispensée au cours des deux années de préparation doit ainsi, dans une approche équilibrée entre théorie et expérience, apporter à l'élève les outils conceptuels et méthodologiques pour lui permettre de comprendre le monde naturel et technique qui l'entoure et de faire l'analyse critique des phénomènes étudiés. Les méthodes utilisées doivent encourager l'élève à devenir graduellement acteur de sa formation, qu'il comprenne mieux l'impact de la science et que, plus assuré dans ses connaissances, il soit préparé à poursuivre son cursus d'études dans les grandes écoles.

La démarche de modélisation occupe également une place centrale dans le programme pour former les élèves à établir, de manière autonome, un lien fait d'allers - retours entre le " monde " des objets, des expériences, des faits, et celui des modèles et des théories. L'enseignant doit rechercher un point d'équilibre entre des approches complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative. La construction d'un modèle passe aussi par l'utilisation maîtrisée des mathématiques dont un des fondateurs de la physique expérimentale, Galilée, énonçait déjà qu'elles sont le langage dans lequel est écrit le monde.

L'enseignement de la physique est renforcé par une réhabilitation de la formation expérimentale des élèves à travers les travaux pratiques (TP) et les expériences de cours. Chaque fois que c'est possible, l'enseignant est invité à présenter des expériences de cours pour illustrer ses propos.

L'enseignement de la physique est enrichi par l'introduction d'*activités numériques* qui permettront d'aborder de nombreux champs de la discipline. L'introduction d'activités numériques dans le programme prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation. Ces activités offrent aux élèves la possibilité :

- d'effectuer une modélisation avancée du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires ;

- de réaliser un programme complet structuré allant de la prise en compte de données expérimentales à la mise en forme des résultats permettant de résoudre un problème scientifique donné ;
- d'étudier l'effet d'une variation des paramètres sur le temps de calcul, sur la précision des résultats, sur la forme des solutions pour des programmes d'ingénierie numérique choisis ;
- d'utiliser les fonctions de l'environnement logiciel pour résoudre un problème scientifique mis en équation lors des enseignements de physique ;
- d'utiliser les fonctions de l'environnement logiciel pour afficher les résultats sous forme graphique ;
- de tenir compte des aspects pratiques comme l'impact des erreurs d'arrondi sur les résultats, le temps de calcul ou le stockage en mémoire.

Pour certains thèmes, les *activités numériques* à développer sont explicitement signalées en *caractères gras italiques* dans la colonne des commentaires du tableau des contenus thématiques. Deux activités numériques sont associées au thème «*Mesures et incertitudes*». Elles définissent des savoir-faire numériques exigibles. Une simulation informatique en langage Python est requise. Dans ce cas, le professeur mettra à la disposition de ces élèves, un exemple de programme informatique écrit dans ce langage de programmation familier à l'élève en cours d'informatique.

En plus des activités exigibles, on pourra utiliser l'outil informatique à chaque fois que celui-ci est susceptible d'apporter un gain de temps ou une meilleure illustration des enseignements. C'est ainsi qu'on pourra faire appel, selon les circonstances, à des logiciels de calcul formel et de représentation graphique, ou à des banques de données.

L'esprit de la démarche scientifique adopté dans l'exécution du programme de physique, empreinte de rigueur et de sens critique permanent, doit permettre à l'élève, sur toute question du programme :

- de communiquer l'essentiel des résultats sous forme claire et concise, tant à l'oral qu'à l'écrit ;
- d'en analyser le caractère de pertinence : modèle utilisé, limites du modèle, influence des paramètres, homogénéité des formules, symétries, interprétation des cas limites, ordres de grandeur et précision ;
- d'en rechercher l'impact pratique ;
- de devenir graduellement acteur de sa formation, qu'il comprenne mieux l'impact de la science et que, plus assuré dans ses connaissances, il soit préparé à poursuivre son cursus d'études dans les grandes écoles.

## 1.2 Repères pour l'enseignant

Lors de la mise en application du programme et dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant organise son enseignement en respectant les principes directeurs suivants :

- privilégier la mise en activité des élèves en évitant tout dogmatisme ;
- adopter une progressivité dans la difficulté des exercices de travaux dirigés permettant ainsi aux élèves l'assimilation, l'entraînement et l'approfondissement ;
- permettre et encadrer l'expression par les élèves de leurs conceptions initiales ;
- valoriser l'approche expérimentale ;
- contextualiser les apprentissages pour leur donner du sens ;
- procéder régulièrement à des synthèses pour expliciter et structurer les savoirs et savoir-faire et les appliquer dans des contextes différents ;
- tisser des liens aussi bien entre les notions du programme qu'avec les autres enseignements, notamment les mathématiques, les génies, électrique et mécanique, et l'informatique, commun à tous les élèves de la voie PSI ;

- favoriser l'acquisition d'automatismes et développer l'autonomie et l'initiative des élèves en proposant des temps de travail personnel ou en groupe.

## 1.3 Communication à l'écrit et à l'oral

La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet à l'élève de développer les savoirs et les savoir-faire d'expression écrite. La qualité de la rédaction et de la présentation, ainsi que la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses élèves, entre les élèves eux-mêmes, doit également contribuer à développer des savoirs et des savoir-faire de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux élèves en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux pratiques ou de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer la communication à l'écrit et à l'oral. La communication utilise des moyens diversifiés : les élèves doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

## 1.4 Évaluation des élèves

L'évaluation des apprentissages en classes préparatoires se définit comme une démarche de collecte d'informations conduisant à un jugement sur la valeur du travail et du résultat d'un élève, par rapport aux objectifs d'une activité d'enseignement, en vue de prendre une décision quant au cheminement ultérieur de l'apprenant. C'est un acte pédagogique ; formatif et sommatif. Elle vise à mesurer le degré de maîtrise des savoirs et savoir-faire tels que définis par le programme et le niveau d'autonomie et d'initiative des élèves. L'élaboration d'une situation d'évaluation prévoit une progression dans les difficultés suffisamment large pour apprécier les différents niveaux des élèves. L'évaluation doit être établie en relation avec les objectifs de formation et les performances attendues des élèves.

Rappelons que la filière PSI s'adresse aux élèves intéressés par une approche théorique des sciences fondamentales et qui désirent comprendre le fonctionnement des différents objets par l'approche expérimentale. Il va de soi que les spécificités de cette filière doivent se retrouver dans le contenu des deux approches, théorique et expérimentale, ainsi que dans l'évaluation et le contrôle des connaissances. Les pratiques d'évaluation doivent respecter l'esprit des objectifs : tester l'aptitude de l'élève moins à résoudre les équations qu'à les poser, puis à analyser les résultats, tant dans leur caractère théorique que pratique.



## 1.5 Organisation des programmes

Le programme de physique est organisé en deux parties «Formation expérimentale» et «Contenus thématiques». Dans la première partie, sont décrits l'organisation de la formation expérimentale et les objectifs de cette formation que les élèves doivent développer et acquérir à la fin de l'année scolaire. La mise en oeuvre de la formation expérimentale doit s'appuyer sur des problématiques concrètes et clairement identifiées. Elles doivent être programmées par l'enseignant de façon à assurer un apprentissage progressif de l'ensemble des connaissances et des savoir-faire attendus.

La seconde partie, intitulée *Contenu thématique*, est structurée autour de sept thèmes. Elle met en valeur les éléments clefs constituant l'ensemble des savoirs et des savoir-faire dont l'assimilation par les élèves est requise. Il est recommandé d'aborder les items de cette partie qui se prêtent à l'exercice, par une approche expérimentale démonstrative ou par une simulation numérique. L'expérience de cours démonstrative menée par l'enseignant pendant le cours éveillerait la curiosité des élèves et susciterait un questionnement actif et collectif, ce qui permettrait de faire évoluer la réflexion théorique et la modélisation. Le choix des thèmes des expériences de cours relève de l'initiative pédagogique et de la responsabilité du professeur.

Pour faciliter la progressivité des acquisitions, pour tenir compte des contraintes liées à la formation expérimentale et afin d'avoir une vision globale à l'échelle nationale, il est impératif de suivre la progression des sept thèmes de cette partie dans l'ordre suivant :

- I **mécanique des fluides ;**
- II **électronique ;**
- III **électromagnétisme ;**
- IV **conversion de puissance ;**
- V **physique des ondes ;**
- VI **optique ;**
- VII **thermodynamique**

L'ordre d'exposition, au sein de chaque thème, relève bien sûr de la liberté pédagogique du professeur, cependant, il devra faciliter la progressivité des acquisitions.

Trois annexes sont consacrées :

- au matériel de physique nécessaire à la mise en oeuvre des programmes ;
- aux outils mathématiques et numériques que les élèves doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de physique à la fin de l'année de la classe de PSI.

# Formation expérimentale

La physique, à l'instar de toutes les sciences, est un entrelacement subtil de modèles théoriques et de validations expérimentales. Les travaux dirigés permettent aux élèves de s'entraîner et de mieux s'approprier les concepts et techniques enseignés. Les travaux pratiques leur apportent quant à eux une compréhension plus concrète des phénomènes naturels et technologiques étudiés et développent leurs savoirs et savoir-faire expérimentaux. Ils permettent ainsi de tisser un lien étroit entre le réel et sa représentation et constituent pour les élèves un moyen d'appropriation de techniques, de méthodes, mais aussi de notions et de concepts.

D'un autre côté, l'activité expérimentale part d'un questionnement inscrit dans un cadre de réflexion théorique et conduit l'élève à analyser la tâche qui lui est demandée, à s'approprier la problématique attachée, à envisager un protocole comportant des expériences, puis à le réaliser. L'élève est alors invité à porter un jugement critique sur la pertinence des résultats obtenus, ce qui permet de conclure quant à la validité des hypothèses formulées. Une séance de travaux pratiques doit comporter non seulement la manipulation proprement dite, mais aussi des temps de réflexion, de construction intellectuelle et d'échanges avec le professeur. C'est pourquoi ce dernier choisit les sujets d'étude plus en raison de leurs qualités formatrices que des phénomènes particuliers qui en constituent le support.

## 1 Objectifs de la formation expérimentale

Le programme de physique introduit les activités expérimentales avec deux principaux objectifs : un objectif d'éducation scientifique et d'apprentissage des principaux concepts qui permettent de comprendre le monde moderne en tant que citoyen éclairé et un objectif de préparation à l'évaluation des savoirs et savoir-faire expérimentaux acquis et par suite au monde professionnel.

À ce propos, le programme de physique souligne l'importance :

- de la pratique expérimentale (travaux pratiques et expériences de cours) comme caractéristique des sciences physiques ;
- de l'acquisition des connaissances scientifiques et techniques de base (ordres de grandeur, schémas d'explication qualitative, modélisation, information sur le monde technique et les connaissances fondamentales en physique y compris les plus récentes) ;
- de l'entraînement à la manipulation, à l'observation, à la réalisation et à la représentation d'objets et de phénomènes ;
- de l'entraînement aux modes de raisonnement des sciences physiques, en essayant de présenter aux élèves l'interaction dialectique entre théorie et expériences.

Effectués en binôme ou trinôme, les TP apprennent aux élèves :

- à se familiariser avec le matériel et à s'adapter à ses contraintes ;
- à réaliser des mesures et des acquisitions, à les commenter, les interpréter et les confronter à un modèle théorique ;
- à concevoir progressivement leurs propres protocoles expérimentaux afin de mettre en oeuvre une démarche leur permettant de réaliser les TP ; puis, plus tard, *s'approprier les concepts de la démarche scientifique durables et indispensables* à tous les futurs ingénieurs, chercheurs ou enseignants.

La formation expérimentale des élèves est réalisée à travers deux composantes : les expériences de cours et les travaux pratiques. Ces deux composantes, complémentaires, ne répondent pas tout à fait aux mêmes objectifs :

- les expériences de cours démonstratives menées par l'enseignant pendant le cours suscitent un questionnement actif et collectif autour d'une situation expérimentale bien choisie permettant de faire évoluer la réflexion théorique et la modélisation, d'aboutir à des lois simplificatrices et unificatrices, de dégager des concepts transversaux entre différents domaines de la physique, de montrer aux élèves que «la théorie et l'expérience sont indissociablement liées» et enfin de mieux se situer par rapport aux objectifs de la leçon. Le choix des thèmes des expériences de cours relève de l'initiative pédagogique et de la responsabilité du professeur ;
- les travaux pratiques permettent, dans une approche contextualisée, suscitée par une problématique clairement identifiée et, chaque fois que cela est possible, transversale, l'acquisition de savoirs et savoir-faire techniques, de savoir dans le domaine de la mesure et de l'évaluation de sa précision, d'autonomie dans la mise en oeuvre de protocoles simples associés à la mesure des grandeurs physiques les plus souvent mesurées.

Afin d'améliorer la pratique expérimentale et rendre les apprentissages plus efficaces, il convient :

- de questionner les élèves avant, pendant et après le TP sur ce qu'ils sont en train de faire et surtout sur le pourquoi ;
- de faire usage d'un matériel sophistiqué (carte d'acquisition, oscilloscope numérique, spectromètre à fibre optique ...) de façon consciente et réfléchie. La mesure effectuée avec l'ordinateur, par exemple, ne doit pas se réduire à un presse-bouton. Les enjeux doivent être clairs pour les élèves ;
- d'être attentif aux exigences des élèves et à l'attendu des différentes évaluations. Ces exigences

doivent être clairement motivées et non pas seulement dictées par la volonté de minimiser l'effort à fournir) ;

- de varier le plus possible la typologie des TP. Par exemple, en alternant le fait d'exposer la théorie avant le TP ou laisser les élèves découvrir la théorie, en alternant entre un texte protocolaire et un bref texte les invitant à développer la mise en oeuvre expérimentale après une recherche documentaire.

Il est important de préciser par écrit, en préambule de l'énoncé de chaque TP, les objectifs et les savoir-faire visés et de ne pas manquer à en évaluer rapidement le degré de réalisation et de maîtrise à la fin de chaque étape ou la fin de la séance.

# 2 Organisation de la formation expérimentale

*Cette partie précise les connaissances et les « savoir-faire » associés à la formation expérimentale des élèves et que ces derniers doivent acquérir dans le domaine de la mesure expérimentale et de l'évaluation des incertitudes des meures. Elle aborde la question de la prévention du risque au laboratoire de physique-chimie. Elle précise aussi la liste des thèmes de travaux pratiques et fixent les objectifs de chaque thème. Elle souligne aussi l'importance de l'évaluation régulière des acquis des élèves inscrits dans le volet de la formation expérimentale.*

*Une liste de matériel, que les élèves doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice succincte, figure dans l'annexe «*1. Liste de matériel de physique*» du présent programme. Son placement en annexe du programme, et non à l'intérieur de la partie dédiée à la formation expérimentale, est délibéré : il exclut l'organisation de séances de travaux pratiques dédiées à un appareil donné et centrées seulement sur l'acquisition des compétences techniques associées.*

## 2.1 Mesures et incertitudes

La notion d'incertitude est indispensable dans la démarche expérimentale. En effet, elle est nécessaire pour juger de la qualité d'une mesure ou de sa pertinence. Sans elle on ne peut examiner la compatibilité d'une mesure avec une loi physique. Ce thème intitulé «*Mesures et incertitudes*» vise à fournir les outils nécessaires à l'analyse de résultats expérimentaux.

Les élèves doivent avoir conscience de la variabilité des résultats obtenus lors d'un processus de mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type, en connaître les origines et les sources, estimer leur influence sur le résultat final, et comprendre et s'approprier ainsi les objectifs visés par l'évaluation des incertitudes. Ils détermineront ensuite ce qu'il faudrait faire pour améliorer la précision d'un résultat.

En fin, il est essentiel que les notions sur les mesures et incertitudes diffusent dans chacun des thèmes du programme, théoriques et expérimentaux, tout au long des deux années préparatoires et qu'elles soient régulièrement évaluées.

Le tableau ci-dessous explicite les savoir-faire exigibles sur le thème «*mesures et incertitudes*». Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

| | |
|---|---|
| Variabilité de la mesure d'une grandeur physique.<br>Notion d'incertitude. Incertitude-type.<br>Erreur ; composante aléatoire et composante systématique de l'erreur.<br>Incertitude-type A. Incertitude-type B. Propagation des incertitudes. Écart normalisé.<br>Évaluation d'une incertitude-type. | Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure.<br>Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A).<br>Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de |

| | |
|---|---|
| | type B).<br>Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale. |
| Incertitude-type composée.<br>Incertitude élargie. | Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient.<br>Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée.<br>*Activité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.* |
| Écriture du résultat d'une mesure.<br>Chiffres significatifs. | Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure. |
| Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé. | Comparer deux valeurs dont les incertitudes- types sont connues à l'aide de leur écart normalisé.<br>Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation. |
| Régression linéaire. | Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle.<br>Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés.<br>*Activité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation MONTE-CARLO – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle* |

## 2.2 Prévention du risque au laboratoire de physique et de chimie

*L'apprentissage et le respect des règles de sécurité dans les laboratoires et les salles de travaux pratiques visent d'une part à réduire les risques liés aux activités expérimentales et d'autre part à sensibiliser les élèves au respect de la législation ainsi qu'à l'impact de leur activité sur l'environnement. L'élève doit adopter une approche méthodique, prudente et soignée et se concentrer sur ce qu'il est en train de faire.*

*La prévention des différents risques repose, d'une part, sur la mise en sécurité des installations électriques, mécaniques, thermodynamiques, … et des matériels exploités et, d'autre part, sur le respect des règles de sécurité lors de leur utilisation ou lors d'opération sur ou à proximité des différentes installations.*

*Des savoirs et des « savoir-faire » sont attachés au thème «*Prévention du risque au laboratoire de physique et de chimie». *Ils sont détaillés dans le tableau ci-dessous.*

### 2.2.1. Prévention des risques au laboratoire

Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire.
Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.

**Risque chimique**

Règles de sécurité au laboratoire. Classes et catégories de danger. Pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques. Mentions de danger (H) et conseils de prudence (P). Fiches de sécurité.

Relever les indications sur le risque associé au prélèvement, au mélange et au stockage des produits chimiques et adopter une attitude responsable lors de leur utilisation.

**Risque électrique**

Le risque électrique comprend le risque de contact, direct ou non, avec une pièce nue sous tension, le risque de court-circuit, et le risque d'arc électrique. Ses conséquences sont l'électrisation, l'électrocution, l'incendie, l'explosion…

Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation d'appareils électriques.

**Risque optique et électromagnétique**

Les rayonnements optiques auxquels peuvent être exposés les élèves sont parfois nocifs pour les yeux et pour la peau. Une démarche de prévention adaptée permet de réduire les risques pour la santé et la sécurité.

Utiliser les sources laser et les diodes électroluminescentes de manière adaptée.
Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation des émetteurs d'ondes hyperfréquences.

**Risque thermique**

L'exposition à une ambiance thermique chaude ou la manipulation de corps chauds ou froids peut être à l'origine de brûlures ou de gelures localisées potentiellement graves.

Adopter une attitude responsable lors de manipulations de corps chauds ou froids.

**Risque mécanique**

Les risques mécaniques englobent la coupure, la lacération ou la piqûre, l'écrasement, le contact avec des machines.

Adopter une attitude responsable lors de manipulations de dispositifs engageant des hautes ou des basses pressions ou lors de la conjonction d'un élément d'un montage et l'énergie d'un mouvement.

**Risque sonore**

Le bruit au travail constitue une nuisance majeure et peut provoquer des surdités mais aussi stress et fatigue qui, à la longue, ont des conséquences sur la santé et la qualité du travail.

Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation des émetteurs d'onde infrasonores, sonores ou ultrasonores.

### 2.2.2. Prévention de l'impact environnemental

Traitement et rejet des espèces chimiques.

Adapter le mode d'élimination d'une espèce chimique ou d'un mélange en fonction des informations recueillies sur la toxicité ou les risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.

### 2.3 Thèmes de travaux pratiques et objectifs

La liste suivante est une proposition non exhaustive de thèmes des TP. *Le choix des sujets, des manipulations à réaliser et de la progression des TP (comme celui des expériences de cours) relève de l'initiative pédagogique et de la responsabilité du professeur* : les thèmes proposés par le programme sont purement indicatifs, ceux-ci peuvent être remplacés par tout thème à l'initiative du professeur et ne faisant appel qu'aux connaissances du programme de la classe. Cependant, leur contenu doit répondre aux objectifs fixés par le programme. Les connaissances et les savoir-faire expérimentaux développés à travers les objectifs des différents thèmes de travaux pratiques sont exigibles aux épreuves d'évaluation, écrites et expérimentales, en classe et éventuellement aux concours. Ils peuvent faire l'objet de questions aux épreuves écrites et orales. Rappelons qu'à travers les thèmes des travaux pratiques, il faudra procéder à l'évaluation des incertitudes types A et types B, à l'étude de leur propagation à l'aide d'un langage de programmation et à la présentation de la valeur numérique d'un résultat expérimental.

### 2.4 Thèmes de travaux pratiques et objectifs

La liste suivante est une proposition non exhaustive de thèmes des TP. *Le choix des sujets, des manipulations à réaliser et de la progression des TP (comme celui des expériences de cours) relève de l'initiative pédagogique et de la responsabilité du professeur* : les thèmes proposés par le programme sont purement indicatifs, ceux-ci peuvent être remplacés par tout thème à l'initiative du professeur et ne faisant appel qu'aux connaissances du programme de la classe. Cependant, leur contenu doit répondre aux objectifs fixés par le programme. Les connaissances et les savoir-faire expérimentaux développés à travers les objectifs des différents thèmes de travaux pratiques sont exigibles aux épreuves d'évaluation, écrites et expérimentales, en classe et éventuellement aux concours. Ils peuvent faire l'objet de questions aux épreuves écrites et orales. Rappelons qu'à travers les thèmes des travaux pratiques, il faudra procéder à l'évaluation des incertitudes types A et types B, à l'étude de leur propagation à l'aide d'un langage de programmation et à la présentation de la valeur numérique d'un résultat expérimental.

## 3 Électronique

### TP1 Étude d'un filtre passe-bande accordable

### TP2 Effet d'un filtre linéaire sur un signal périodique

### TP3 Analyse spectrale d'un signal électronique

### TP4 Traitement numérique d'un signal, échantillonnage, filtrage numérique…

### TP5 Modulation et démodulation d'amplitude

### TP6 Oscillateur auto-entretenu quasi sinusoïdal

### TP7 Oscillateur de relaxation

- connaître les caractéristiques essentielles d'un appareil à l'aide de sa notice ou directement de l'appareil : impédance d'entrée, impédance de sortie, bande passante selon le cas ;
- maîtriser l'utilisation des instruments électroniques usuels ;
- appréhender les conséquences des valeurs de la résistance d'entrée ou de sortie d'un appareil de mesure sur le fonctionnement d'un circuit ;

- comprendre et réaliser l'acquisition d'un signal périodique simple puis l'analyser par transformée de Fourier ;
- caractériser un signal à l'aide de son spectre ;
- mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'action d'un filtre sur un signal périodique ;
- choisir de façon cohérente les paramètres (durée, nombre d'échantillons, fréquence d'échantillonnage) d'une d'acquisition numérique afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon ;
- confronter les résultats expérimentaux aux expressions théoriques ;
- déterminer rapidement le type de filtre étudié et de sa fréquence de coupure ;
- tracer le diagramme de Bode expérimental en gain et en phase ;
- obtenir la réponse d'un filtre à un signal créneau et à un signal triangulaire ;
- étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale ;
- mettre en évidence le caractère intégrateur ou dérivateur d'un filtre dans son diagramme asymptotique ;
- identifier la présence de la rétroaction sur l'entrée inverseuse d'un amplificateur linéaire intégré comme un indice d'une possibilité de stabilité du régime linéaire ;
- produire un signal par multiplication de signaux ;
- mettre en œuvre la modulation d'amplitude ;
- décrire le spectre d'un signal modulé ;
- réaliser la démodulation d'amplitude par détection de crête ;
- réaliser la démodulation synchrone ;
- mettre en œuvre un convertisseur analogique/numérique et un traitement numérique afin de réaliser un filtre passe-bas ;
- utiliser un convertisseur numérique/analogique pour restituer un signal analogique ;
- mettre en évidence et étudier le phénomène de repliement de spectre dû à l'échantillonnage lors de l'utilisation d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition ;
- analyser un spectre calculé numériquement et repérer l'influence du repliement spectral et des fuites spectrales ;
- réaliser une mesure de résolution (nombre de bits) d'un CAN ;
- réaliser un filtrage numérique ;
- détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles composantes spectrales ;
- réaliser un comparateur à hystérésis et analyser son fonctionnement ;
- valider la relation théorique donnant la période d'un oscillateur de relaxation ;
- mettre en œuvre un oscillateur quasi-sinusoïdal et un oscillateur de relaxation ;
- analyser les spectres des signaux générés lors de la mise en œuvre d'un oscillateur.

## 4 Électronique de puissance

### TP8 Étude d'un transformateur : ferromagnétisme

### TP9 Étude d'un transformateur : bilan de puissance

### TP10 Étude de la machine à courant continu

### TP11 Conversion électronique de puissance, étude d'un hacheur

### TP12 Asservissement de vitesse d'une machine à courant continu

### TP13 Oscillateurs électriques couplés

### TP14 Redressement double alternance et détection

- mise en évidence du cycle d'hystérésis d'un milieu ferromagnétique ;
- mettre en œuvre un transformateur et étudier son rendement sur charge résistive ;
- savoir utiliser un transformateur d'isolement ;
- mesurer une puissance moyenne à l'aide d'un wattmètre numérique ;
- exploiter les résultats de mesures afin de déterminer les caractéristiques d'un transformateur réel ;
- mettre en œuvre une machine à courant continu ;
- déterminer les pertes mécaniques et les pertes fer du moteur à courant continu ;
- étudier la commande du transistor de puissance du hacheur ;
- étudier un hacheur chargé par une association d'une résistance et d'une bobine ;
- savoir estimer la résistance et la capacité convenables pour réaliser un détecteur de crête satisfaisant.

## 5 Physique des ondes

### TP15 Ondes mécaniques, acoustiques, corde vibrante

### TP16 Effet Doppler

### TP17 Propagation dans un câble coaxial

### TP18 Ondes électromagnétiques centimétriques en propagation libre

- analyser la phénoménologie associée à différents types d'ondes : planes, sphériques, progressives, stationnaires, harmoniques et comprendre les liens possibles entre ces qualificatifs ;
- décrire une onde stationnaire observée par stroboscopie sur la corde de Melde ;
- mettre en oeuvre un dispositif expérimental permettant d'analyser le spectre du signal acoustique produit par une corde vibrante ;
- mettre en oeuvre une détection synchrone pour mesurer une vitesse par décalage Doppler ;
- comprendre les origines de la dispersion : réponse du milieu ou conditions aux limites transverses ;
- déterminer la période, la fréquence et la longueur d'onde d'une onde ;
- mesurer la vitesse de phase et le déphasage dû à la propagation d'un phénomène ondulatoire ;
- déterminer la célérité de propagation des ultrasons.
- mesurer le retard d'une salve d'ultrasons ;
- étudier l'émission, la polarisation, la propagation et la réception d'une onde électromagnétique dans le domaine des ondes centimétriques (ou micro-ondes) ;

- mettre en oeuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique, dans le domaine des ondes centimétriques ;
- mettre en évidence une polarisation rectiligne ;
- réaliser des expériences de goniométrie, de diffraction et d'interférences aux échelles de longueur d'onde des hyperfréquences ;
- étudier la propagation d'un signal dans le câble coaxial ;
- déterminer une différence de fréquences à partir d'enregistrements de battements ou d'observation sensorielle directe ;
- mettre en œuvre un dispositif expérimental pour visualiser et caractériser le phénomène d'interférences de deux ondes.

# 6 Optique

## TP19 Interférence et diffraction des ondes lumineuses

## TP20 Polarisation des ondes lumineuses

## TP21 Réglage et utilisation d'un spectrogoniomètre, spectroscope à réseau

- éclairer un objet de manière adaptée ;
- optimiser la qualité d'une image ;
- choisir une ou plusieurs lentilles en fonction des contraintes expérimentales ;
- utiliser des polariseurs et étudier quantitativement la loi de Malus ;
- mettre à profit les réglages concernant la lunette et le collimateur afin d'utiliser un goniomètre ;
- savoir mesurer un angle à l'aide du vernier d'un goniomètre ;
- étudier la déviation de la lumière par un réseau ;
- mettre en évidence le minimum de déviation ;
- mesurer la densité de traits d'un réseau à partir de raies de longueur d'onde connue ;
- mesurer une longueur d'onde optique ;
- procéder à l'évaluation des incertitudes-types B et leur propagation à l'aide d'un langage de programmation ;
- visualiser les spectres d'émission atomique du sodium, du mercure et de l'hydrogène ;
- déterminer un spectre à l'aide d'un spectromètre à fibre optique ;
- obtenir, observer et analyser quantitativement des figures d'interférences ;
- savoir réaliser un protocole de réglage en contrôlant les étapes successives ;
- savoir utiliser une lame à retard ;
- mettre en œuvre un photorécepteur ;
- mettre en œuvre des expériences utilisant un capteur photographique numérique ;
- réaliser un enregistrement à l'aide d'un capteur CCD.

# 7 Mécanique

## TP22 Oscillateurs mécaniques couplés

- étudier le mouvement oscillatoire d'un pendule mécanique ;
- mesurer la période d'oscillation d'un pendule ;
- mettre en évidence le défaut d'isochronisme du pendule ;
- mesurer la période d'oscillation en fonction de la longueur ;
- mesurer le moment d'inertie d'un solide en rotation et étudier sa variation quand on déplace les masses qui le constituent ;
- déterminer l'accélération de la pesanteur $g$ ;
- comparer les oscillations d'un pendule pesant au modèle du pendule simple ;
- réaliser l'acquisition expérimentale du portrait de phase d'un pendule pesant ;
- réaliser l'acquisition des oscillations de deux oscillateurs mécaniques couplés ;
- mettre en évide les différents modes propres ;
- mettre en évidence le phénomène de battement ;
- mesurer un couple de frottement ;
- réaliser l'étude énergétique d'un pendule pesant et mettre en évidence la diminution de l'énergie mécanique.

# 8 Thermodynamique

## TP23 Conduction thermique

- comparer expérimentalement les conductivités thermiques de quelques matériaux ;
- classer les matériaux selon leurs propriétés isolantes.
- étudier la propagation de la chaleur dans des barres métalliques ;
- mesurer la conductivité thermique d'un matériau ;
- mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant une caméra thermique ou un capteur dans le domaine des infrarouges.

# 9 Compte-rendu

La séance de travaux pratiques donne lieu à une synthèse écrite comportant, sous forme succincte, l'indication et l'exploitation des résultats. À cet égard on attache de l'importance à leur présentation graphique. L'utilisation d'un ordinateur, soit pour l'acquisition et le traitement de données expérimentales, soit pour comparer les résultats des mesures aux données théoriques, évite des calculs longs et répétitifs et favorise le tracé de courbes. Si les élèves sont appelés à utiliser d'autres appareils, toutes les indications nécessaires doivent leur être fournies.

Il est impératif d'exiger de l'élève la rédaction d'un compte-rendu pendant une séance de travaux pratiques. Cette aptitude constitue un des objectifs de la formation scientifique. Les activités expérimentales sont aussi l'occasion de travailler l'expression orale lors d'un point de situation ou d'une synthèse finale par exemple. Le but est de bien préparer les élèves de CPGE à la présentation des travaux et projets qu'ils auront à conduire et à exposer aux épreuves orales et au cours de leur formation en école d'ingénieur et, plus généralement, dans le cadre de leur métier de chercheur ou d'ingénieur.

L'élève doit rédiger dans son cahier, au fur et à mesure, un compte-rendu :

- définissant les objectifs du thème de travaux pratiques ;
- précisant la problématique préalablement définie ;
- expliquant les choix expérimentaux effectués et les techniques de mesure utilisées ;
- comprenant les mesures effectuées, et les courbes tracées et visualisées, les photos des écrans d'appareil de mesure ou de visualisation et précisant bien les choix des paramètres de mesure (amplitudes, fréquences, calibres, etc.) ;
- interprétant les différentes courbes et mesures en relation avec les résultats théoriques fournis.

Si l'intérêt du compte-rendu est évident, en revanche il faut veiller à ce qu'il ne prenne pas une importance considérable, en temps, par rapport au travail expérimental proprement dit.

D'autre part, les différentes activités pratiques doivent être couronnées par l'évaluation *hebdomadaire et trimestrielle* des savoir et savoir-faire expérimentaux, Lors de cette évaluation, il faudrait bien expliciter les distinctions entre savoirs et savoir-faire, et entre savoir-utiliser et savoir mettre en oeuvre.

# Contenus thématiques

Chaque thème du programme de physique comporte une introduction spécifique indiquant les objectifs de formation et les domaines d'application. Elle est complétée par un tableau en deux colonnes qui identifient, d'une part, les notions et contenus à connaître, et donc exigible, d'autre part, des commentaires ainsi que les activités numériques et expérimentales supports de la formation. Les activités numériques sont identifiées en *caractères gras italiques* ; le langage de programmation conseillé est le *langage Python*. Les thèmes des *activités numériques* sont choisis de manière à représenter la diversité des applications possibles. Le professeur veillera à ce qu'une concertation régulière avec l'enseignant d'informatique soit développée autour de l'exécution de ces activités.

Le programme a été rédigé et abondamment commenté, avec le souci majeur de faciliter la transition entre l'enseignement secondaire et le système des classes préparatoires. Pour atteindre ce but, il a été jugé indispensable :

- d'introduire progressivement les outils et les méthodes de l'enseignement de physique post-baccalauréat sur des situations conceptuelles aussi proches que possible de celles qui ont été rencontrées au lycée ; en évitant, quand c'est possible, l'emploi d'outils mathématiques non encore maîtrisés, liés à des concepts physiques nouveaux ;
- de coordonner entre les enseignements de mathématiques, sciences industrielles, informatique, physique et chimie utilisant des outils souvent communs, pour faciliter le travail d'assimilation des élèves. Ceci rejette tout cloisonnement des enseignements scientifiques et suppose au contraire une concertation étroite au sein de l'équipe pédagogique ;
- de valoriser l'approche expérimentale des phénomènes pour stimuler chez l'élève une attitude active et créatrice, favorisant l'appropriation des connaissances et le développement d'un certain savoir faire manuel. Les travaux pratiques (TP) et les expériences de cours sont les temps forts de cette valorisation ;

- de valoriser l'approche numérique afin de permettre aux élèves de mettent en oeuvre leurs connaissances en informatique dans le cadre de l'étude d'une application en physique.

Les têtes de chapitre sont très classiques, de façon que les acquis des élèves soient clairement identifié.

## Table des matières avec horaires indicatifs



## 1 Mécanique des fluides

L'objectif de cette partie est de présenter les grandeurs essentielles caractérisant un écoulement. On considère l'accélération comme la dérivée particulaire de la vitesse. L'étude du mouvement de la particule de fluide est déterminée par l'application du principe fondamental de la dynamique sans faire référence aux équations d'EULER ou de NAVIER-STOKES.

Le professeur pourra aborder les différentes notions de cette partie dans l'ordre qu'il souhaite en fonction du besoin pédagogique.

Les objectifs généraux de cette partie sont :

- utiliser les trois échelles macroscopique, microscopique, mésoscopique ;
- définir avec rigueur un système approprié ;
- réaliser des bilans sous forme globale et locale ;
- utiliser des modèles et analyser leurs limites ;
- appliquer les lois générales de la mécanique des fluides et de la thermodynamique ;
- étudier des systèmes d'intérêt industriel.

## 1.1 Étude phénoménologique des fluides en écoulement

*On introduit la notion de viscosité sur un exemple d'écoulement de cisaillement simple. Cette notion permet de classer les écoulements et évoquer la résolution des paradoxes auxquels peut conduire le modèle de l'écoulement parfait. Les expressions des forces surfaciques de viscosité n'est pas exigible.*

*Le nombre de Reynolds est défini à partir du rapport de deux temps caractéristiques construits par analyse dimensionnelle. Le temps caractéristique de la convection est simplement le rapport entre la distance parcourue par la particule fluide et la vitesse caractéristique. Le temps caractéristique de la diffusion est obtenu à partir de l'équation du mouvement où les termes associé à la diffusion sont prépondérants. Le nombre de Reynolds permet d'aborder la notion de similitude entre des systèmes réalisés à des échelles différentes et caractérisés par les mêmes nombres sans dimension.*

| | |
|---|---|
| Définition d'un fluide.<br>Modèle du fluide continu. | On utilise la notion du libre parcours moyen de manière purement descriptive ; la notion de section efficace et le modèle des sphères dures sont hors-programme. |
| Particule de fluide. | On mentionne les trois échelles spatiales : échelle microscopique (moléculaire), échelle mésoscopique (de la particule fluide), échelle macroscopique.<br>On définit la particule de fluide comme un système mésoscopique de masse constante. |
| Masse volumique. | On donne l'ordre de grandeur des masses volumiques de l'eau et de l'air dans les conditions usuelles. |
| Pression.<br>Viscosité dynamique.<br>Équivalents volumiques des forces de pression et des forces de viscosité. | On définit la viscosité via les expressions phénoménologiques des forces surfaciques de viscosité dans la situation simplifiée d'un champ de vitesses $\vec{V} = V_x(y)\vec{u_x}$ ; on en déduit l'expression de la force volumique de viscosité, dont on admet le caractère général pour un fluide newtonien en écoulement incompressible.<br>On donne l'ordre de grandeur de la viscosité de fluides courants.<br>On signale la condition d'adhérence à l'interface fluide-solide.<br>Toute modélisation microscopique de la viscosité est exclue.<br>La deuxième viscosité (de compressibilité) est hors programme. |

## 1.2 Cinématique des fluides

*La cinématique des fluides est considérée exclusivement comme un outil : elle ne peut être l'objet principal d'un problème écrit ou d'un exercice d'oral. On peut s'appuyer sur la lecture de cartes d'écoulements. La distribution locale des vitesses dans un milieu continu et la matrice des taux de déformation sont hors-programme : on se limite à illustrer sur quelques exemples pertinents la signification physique de* $div(\vec{v})$ *et de* $\overrightarrow{rot}(\vec{v})$.

| | |
|---|---|
| Description de Lagrange, description d'Euler. | On mentionne l'intérêt et l'inconvénient de chaque description. |
| Champ eulerien des vitesses : vitesse de la particule de fluide (vitesse microscopique et vitesse mésoscopique), ligne de courant, tube de courant. | On distingue vitesse microscopique et vitesse mésoscopique. |
| Dérivée particulaire d'un champ : terme local ; terme mathématique convectif $(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}$ | On définit la dérivée particulaire d'une grandeur eulerienne comme étant la dérivée totale de cette grandeur en suivant le mouvement de la particule fluide.<br>On se limite au champ de masse volumique et au champ des vitesses. |
| Densité de courant de masse.<br>Débit massique. | On signale que le vocabulaire de l'analyse vectorielle (circulation, flux...) est issu de la mécanique des fluides. |
| Bilans de masse : équations globale et locale de conservation de la masse. | On déduit la condition imposée au champ des vitesses à la limite d'un obstacle imperméable.<br>On signale l'analogie entre les lois de conservation de la masse et de la charge électrique dans le cours l'électromagnétisme.<br>Il s'agit simplement d'introduire les définitions en dégageant le contenu physique des notions introduites |
| Écoulement stationnaire.<br>Ligne et tube de courant de masse. | Un écoulement est stationnaire si tous les champs euleriens sont indépendants du temps.<br>À partir d'une carte de champ des vitesses en régime stationnaire, on décrit qualitativement le champ des accélérations. |
| Écoulement incompressible et homogène. | On définit un écoulement incompressible et homogène par la propriété d'une masse volumique constante et uniforme ( $D\rho/Dt = 0$ ,$div(\vec{v}) = 0$ en tout point). On relie cette propriété à la conservation du volume pour un système fermé. |
| Débit volumique. | On signale la conservation du débit volumique le long d'un tube de courant indéformable et on définit la notion de vitesse débitante également appelée vitesse moyenne. |
| Écoulement irrotationnel. Potentiel des vitesses. | Les notions de fonction de courant et de potentiel complexe des vitesses sont hors-programme. |

## 1.3 Dynamique des fluides

*L'expression de l'accélération comme la dérivée particulaire de la vitesse est abordée mais les équations d'Euler ou de Navier-Stokes ne sont pas au programme.*

| | |
|---|---|
| Fluide parfait. Fluide visqueux.<br>Nombre de Reynolds. | L'étude du mouvement de la particule de fluide est déterminée par application du principe fondamental de la dynamique.<br>On interprète le nombre de Reynolds comme le rapport d'un temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement sur un temps caractéristique de convection.<br>On signale que la viscosité est un transport diffusif de quantité de mouvement.<br>On évalue le nombre de Reynolds et on l'utilise pour caractériser le régime d'écoulement.<br>L'étude est limitée aux écoulements visqueux incompressibles. |
| Chute de pression dans une conduite horizontale.<br>Loi de Hagen-Poiseuille.<br>Résistance hydraulique.<br>Notion de similitude et adimensionnement des équations en mécaniques des fluides. | Dans le cas d'un écoulement à bas nombre de Reynolds, on établit la loi de Hagen-Poiseuille pour un écoulement laminaire incompressible homogène se produisant dans une conduite cylindrique.<br>On signale que pour un écoulement quelconque, on utilise des abaques donnant la chute de pression en fonction du nombre de Reynolds.<br>On illustre l'adimensionnement des équations sur un exemple simple. On indique l'utilité de la similitude pour le passage des résultats expérimentaux ou numériques concernant un prototype vers le système réel correspondant.<br>Toute étude générale de la similitude est hors programme. |
| Force de traînée d'une sphère solide en mouvement rectiligne uniforme dans un fluide.<br>Loi de Stokes. | L'approche est purement descriptive. On s'intéresse à l'écoulement engendré par le mouvement rectiligne et uniforme d'une sphère. |
| Cœfficient de traînée $C_x$ ; graphe de $C_x$ en fonction du nombre de Reynolds.<br>Notion d'écoulement laminaire et d'écoulement turbulent. | En exploitant d'une part les graphes expérimentaux donnant la traînée en fonction du nombre de Reynolds et d'autre part des cartes de lignes de champ, des photos ou des films de cet écoulement, on fait apparaître les modèles limites de l'écoulement laminaire et de l'écoulement turbulent, ainsi que les expressions correspondantes de la traînée.<br>On associe une gamme de nombre de Reynolds à un modèle de traînée linéaire ou à un modèle quadratique.<br>Les écoulements turbulents en tant que tels ne sont pas au programme. |
| Notion d'écoulement parfait et de couche limite.<br>Forces de traînée et de portance d'une aile d'avion à nombre de Reynolds élevé. | Un écoulement parfait est un écoulement où tous les phénomènes diffusifs, notamment la viscosité, sont négligeables : les particules de fluide évoluent de manière adiabatique et réversible.<br>On introduit qualitativement la notion de couche |

| | |
|---|---|
| | limite afin de préciser le domaine de validité du modèle de l'écoulement parfait.<br>On reformule la condition à la limite d'un obstacle, imposée au champ des vitesses.<br>On donne et on exploite les allures des graphiques de $C_x$ et $C_z$ et on les utilise pour préciser l'influence de l'angle d'incidence sur les forces de traînée et de portance. |

## 1.4 Bilans dynamiques et thermodynamiques

*Cette partie prolonge l'étude des machines thermiques réalisée en première année. Elle a pour objectif d'effectuer des bilans de grandeurs extensives thermodynamiques et mécaniques. Ces bilans sont illustrés sur des situations d'intérêt industriel (réacteur, éolienne, turbine, machines thermiques...).*

*On définit également le modèle de l'écoulement parfait qui permet d'introduire la relation de BERNOULLI. Si un bilan mécanique nécessite un changement de référentiel, on peut utiliser la loi de composition des vitesses fournie.*

*Toute formulation générale, notamment le théorème d'EULER et le théorème de REYNOLDS, sont hors-programme.*

| | |
|---|---|
| Système ouvert, système fermé.<br>Théorèmes de BERNOULLI pour les écoulements parfaits incompressibles et homogènes.<br>Applications : effet VENTURI, débitmètre, tube de PITOT.<br>Exemples de bilans de quantité de mouvement, de moment cinétique, d'énergie cinétique, d'énergie mécanique, d'énergie interne et d'entropie pour un écoulement unidimensionnel en régime permanent. | À partir d'une surface de contrôle ouverte vis-à-vis des échanges, on se ramène à un système fermé approprié.<br>La forme généralisée du théorème de BERNOULLI pour les écoulements compressibles est hors-programme.<br>On effectue un bilan d'énergie sur une installation industrielle.<br>On affirme que la puissance des actions intérieures est nulle pour un écoulement parfait et incompressible.<br>Toute formulation générale, notamment le théorème d'EULER et le théorème de REYNOLDS, est hors-programme. |

# 2 Életronique

Cette partie a pour objectif, en révisant les savoir et les savoir-faire sur les circuits électroniques acquis en première année en cours, en expériences de cours et en travaux pratiques, de les reprendre dans l'esprit du traitement du signal et de l'étude des systèmes (stabilité, oscillateur, réalisation de filtres actifs à forte impédance d'entrée pour une association en cascade). Ces différentes thématiques sont illustrées à l'aide de l'amplificateur linéaire intégré, (également appelé amplificateur opérationnel) dont l'étude n'est pas une fin en soi mais un outil permettant des réalisations expérimentales variées.

On complète l'approche analogique des circuits électriques par un chapitre à vocation expérimentale consacré au traitement numérique des signaux à travers les sujets suivants :

- l'échantillonnage et le repliement de spectre ;
- le filtrage numérique ;
- les conversions analogique/numérique et numérique/analogique.

Enfin, la problématique de la transmission d'un signal temporel codant une information est abordée dans l'étude et la réalisation d'une modulation, en relation avec la partie du programme consacrée à la propagation des ondes électromagnétiques.

Tout calcul théorique, notamment de transformée (de Fourier, de Laplace ou autre), est exclu du programme. Néanmoins, dans le but de faciliter le lien avec le cours de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur, la notation symbolique de la fonction de transfert sera utilisée.

Les objectifs généraux de cette partie sont :

- passer d'une représentation temporelle à une représentation fréquentielle et réciproquement ;
- analyser la stabilité d'un système linéaire du premier et du second ordre ;
- étudier des manifestations des non linéarités ;
- effectuer une analyse spectrale de signaux ;
- effectuer quelques opérations de traitement du signal en électronique analogique et numérique.
- illustrer expérimentalement la condition de Nyquist-Shannon ;
- expliquer et mettre en oeuvre un filtrage numérique.

## 2.1 Stabilité et réponse d'un système linéaire

*On s'intéresse dans cette partie aux propriétés des systèmes linéaires déjà abordés en première année. Les outils introduits en première année (loi des mailles, loi des nœuds, diviseur de tension) et savoirs et savoir-faire relatifs au filtrage et à la décomposition harmonique d'un signal périodique sont révisés sans ajout de nouveaux acquis. Dans le but de faciliter le lien avec le cours de sciences industrielles pour l'ingénieur, la notation symbolique de la fonction de transfert $H(p)$ est utilisée sans faire référence à la transformée deLaplace. L'étude est complétée par une analyse de la stabilité des systèmes du premier et du second ordre en examinant le régime transitoire associé à l'équation différentielle.*

| | |
|---|---|
| Réponse d'un système linéaire à un signal sinusoïdal en régime établi (réponse harmonique).<br>Fonction de transfert entrée-sortie d'un système linéaire continu et invariant.<br>Représentation de Bode. Tracés asymptotiques.<br>L'utilisation en travaux pratiques de moyens numériques d'analyse harmonique permettra des comparaisons immédiates entre fonction de transfert et représentation spectrale d'une réponse du système. | Un système est linéaire quand il est régi par une équation différentielle linéaire.<br>On fait remarquer qu'un signal possède une représentation dans l'espace des temps et une représentation dans l'espace des fréquences. |
| Stabilité. | On étudie la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 d'après les signes des coefficients de l'équation différentielle homogène ou de la fonction de transfert. |
| Modèle de l'ALI défini par une résistance d'entrée infinie, une résistance de sortie nulle, une fonction de transfert du premier ordre en régime linéaire, une saturation de la tension de sortie. Limites du modèle : vitesse limite de balayage, saturation de l'intensité du courant de sortie. | On montre sur l'exemple de l'amplificateur inverseur, les conséquences de la bande passante des ALI sur les limitations linéaires des fonctions réalisées au moyen de ce composant.<br>La vitesse limite de balayage de l'ALI est évoquée en travaux pratiques afin d'identifier les distorsions harmoniques traduisant un comportement non linéaire. Les limitations associées aux courants de polarisation et la tension de décalage ne sont pas étudiées. |

| | |
|---|---|
| Modèle de l'ALI idéal en régime linéaire et en régime saturé. | On donne les hypothèses du modèle de l'ALI idéal en régime linéaire, en particulier, une résistance d'entrée infinie, une résistance de sortie nulle, une bande passante infinie. |
| Rétroaction. | Toute étude générale de la rétroaction est hors programme. On se limite à l'étude de la rétroaction sur quelques exemple simples (amplificateur inverseur ou non inverseur, suiveur, intégrateur).<br>La rétroaction et le bouclage des systèmes linéaires sont introduits dans le but d'aborder la stabilité.<br>On souligne en particulier que la présence d'une rétroaction sur la borne inverseuse de l'ALI est un indice d'une probable stabilité du régime linéaire d'un montage. |
| Mise en cascade de montages simples. | On détermine les impédances d'entrées de quelques montages simples (amplificateur inverseur ou non inverseur, suiveur, intégrateur) et on explique l'intérêt de réaliser des filtres de grande impédance d'entrée et de faible résistance de sortie pour leur mise en cascade. |
| Comparateur simple. | On affirme que l'absence de rétroaction ou la présence d'une unique rétroaction sur la borne non inverseuse est un indice d'un probable comportement en saturation. |
| Comparateur à hystérésis. | On établit le cycle d'un comparateur à hystérésis.<br>On utilise le phénomène d'hystérésis pour illustrer la notion de la fonction mémoire.<br>On affirme que pour un signal d'entrée sinusoïdal, le caractère non-linéaire engendre la génération d'harmoniques en sortie. |

## 2.2 Oscillateurs

*Cette partie s'intéresse à une étude non exhaustive des oscillateurs en électronique. Les exemples sont choisis à l'initiative du professeur et les calculs des fonctions de transfert des filtres ne constituent pas un objectif de formation. En travaux pratiques, on complète l'étude par une analyse spectrale des signaux.*

| | |
|---|---|
| Oscillateur quasi-sinusoïdal réalisé en bouclant un filtre passe-bande du deuxième ordre avec un amplificateur. | On exprime les conditions théoriques (gain et fréquence) d'auto-oscillation sinusoïdale d'un système linéaire bouclé.<br>On analyse sur l'équation différentielle l'inégalité que doit vérifier le gain de l'amplificateur afin d'assurer le démarrage des oscillations.<br>On interprète le rôle des non-linéarités dans la stabilisation de l'amplitude des oscillations.<br>On définit le taux de distorsion harmonique des signaux. |
| Oscillateur de relaxation associant un intégrateur et un comparateur à hystérésis.<br>Générateur de signaux non sinusoïdaux. | On décrit les différentes séquences de fonctionnement d'un oscillateur de relaxation, on exprime les conditions de basculement et on détermine la période d'oscillation. |

## 2.3 Électronique numérique

*L'avènement et les performances toujours croissantes des calculateurs électroniques ont conduit à vouloir manipuler les signaux issus de capteurs, non plus sous forme analogique mais sous une forme dite numérique ou numérisée, manipulable par ces calculateurs.*

*Cette partie, à vocation expérimentale, aborde la question du traitement numérique du signal dans le prolongement du programme de première année. les notion de base sont introduites d'un point de vue expérimental et constituent une initiation au traitement numérique des signaux à travers les points suivants : l'échantillonnage et le repliement de spectre, les conversions analogique/numérique et numérique/analogique et le filtrage numérique. Le phénomène de repliement de spectre est expliqué qualitativement au moyen d'illustrations démonstratives, l'objectif étant de mettre en place la condition de Nyquist-Shannon afin de réaliser convenablement une acquisition numérique en vue d'une analyse spectrale. Un filtrage numérique, du type passe-bas, est réalisé à l'aide d'un convertisseur analogique/numérique (CAN) et d'un traitement numérique, un convertisseur numérique/analogique (CNA) restitue ensuite un signal de sortie analogique.*

*Afin de mettre en évidence d'autres effets associés à l'échantillonnage, on réalise de manière comparative un filtre analogique passe-bas et un filtre numérique remplissant la même fonction. Ce dernier est réalisé à l'aide d'une chaîne de traitement : CAN, algorithme numérique, CNA. On étudie expérimentalement l'influence de la fréquence d'échantillonnage.*

| | |
|---|---|
| Signal analogique et signal numérique. Schéma synoptique de traitement d'un signal analogique. Échantillonnage.<br>Analyse spectrale numérique : choix des paramètres (durée, nombre d'échantillons, fréquence d'échantillonnage) d'une acquisition numérique afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon.<br>Théorème de Nyquist-Shannon.<br>Structure du spectre du signal obtenu après échantillonnage. Repliement du spectre. | On explique de façon qualitative les diverses transformations que l'on fait subir à un signal analogique pour le rendre manipulable par un calculateur : échantillonnage, quantification et codage.<br>On réalise en travaux pratiques, l'échantillonnage d'un signal. On commente la structure du spectre du signal obtenu après échantillonnage et on montre l'influence de la fréquence d'échantillonnage.<br>On met en évidence le phénomène de repliement de spectre provoqué par l'échantillonnage lors de l'utilisation d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition.<br>*Activité numérique : calculer, à l'aide d'un langage de programmation, la transformée de Fourier discrète d'un signal numérique.* |
| Filtrage numérique. | On présente une étude comparative d'un filtre analogique passe-bas et d'un filtre numérique remplissant la même fonction.<br>On met en oeuvre, en travaux pratiques, un convertisseur analogique/numérique et un traitement numérique afin de réaliser un filtre passe-bas. |
| Restitution d'un signal analogique. | On explique comment restituer le signal analogique à l'aide d'un filtre passe-bas. On met en oeuvre, en travaux pratiques, un convertisseur numérique/analogique pour restituer un signal analogique.<br>*Activité numérique : réaliser, à l'aide d'un langage de programmation, un filtrage numérique d'un signal issu d'une acquisition, et mettre en évidence la limitation introduite par l'échantillonnage.* |

## 2.4 Modulation et démodulation d’amplitude

*La problématique de la transmission d’un signal temporel codant une information est abordée dans l’étude et la réalisation d’une modulation, en relation avec la partie du programme consacrée à la propagation des ondes électromagnétiques et le traitement du signal. Dans un premier temps, on fait une présentation sommaire du multiplieur analogique puis on aborde l’aspect théorique de la modulation et de la démodulation. Les aspects expérimentaux du sujet sont traités en travaux pratiques.*

| | |
|---|---|
| Fonction multiplication analogique : schéma et relation de fonctionnement. | La fonction multiplication analogique concerne un multiplieur analogique réalisant la fonction : $$v_s(t) = k.v_{e1}(t) \times v_{e2}(t)$$ |
| Multiplication d’un signal par une constante.<br>Multiplication d’un signal sinusoïdal par lui-même.<br>Multiplication de deux signaux sinusoïdaux différents. | On précise les caractéristiques du signal de sortie : amplitude, fréquence et valeur moyenne.<br>Dans le cas de la multiplication de deux signaux sinusoïdaux différents, on distingue les deux cas : fréquences voisines et fréquences très différentes.<br>En travaux pratiques, on fait l’analyse spectrale du signal de sortie et on fait remarquer la non-linéarité du composant multiplieur. |
| Transmission d’un signal codant une information variant dans le temps. Intérêt de la modulation. | On définit un signal modulé en amplitude, en fréquence, en phase.<br>On explique l’intérêt de la modulation dans la transmission des signaux.<br>On donne des ordres de grandeur des fréquences utilisées pour les signaux radio AM, FM, la téléphonie mobile. |
| Modulation d’amplitude à l’aide d’un multiplieur analogique, taux de modulation. | On interprète le signal modulé comme le produit d’une porteuse par une modulante et on décrit le spectre d’un signal modulé. |
| Démodulation d’amplitude :<br>• Démodulation par détection d’enveloppe.<br>• Démodulation synchrone. | On justifie la nécessité d’utiliser une opération non linéaire.<br>On fait constater l’influence du taux de modulation sur la démodulation d’amplitude.<br>On explique le principe de la détection synchrone.<br>On réaliser en travaux pratiques une démodulation synchrone. |

# 3 Électromagnétisme

L’enseignement de l’électromagnétisme est centré d’une part sur l’étude des phénomènes d’induction électromagnétique et de leurs applications dont certaines sont développées dans la partie " Conversion de puissance ", et d’autre part, sur l’étude de la propagation des ondes électromagnétiques (intégrée dans la partie " Physique des ondes "). Cet enseignement s’appuie sur l’enseignement d’électromagnétisme de PCSI.

En ce qui concerne les forces de Laplace, on traite des modèles simples pour lesquels le calcul des forces de Laplace ne requiert aucune technicité et on se limite aux expressions des forces volumiques et linéiques. Le flux coupé et le théorème de Maxwell sont hors-programme. Tout calcul de forces de Laplace à partir de l’énergie magnétique est hors-programme.

L’enseignement d’électrostatique et de magnétostatique de la classe PCSI est complété par une approche locale (équations de Maxwell et relations de passage). Aucune technicité supplémentaire ne doit être recherchée dans les calculs de champs électrique ou magnétique dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) ou quasi-permanents ; en particulier le calcul de champs magnétiques créés par une distribution volumique ou surfacique de courants par la loi deBiot et Savart reste hors-programme.

Les objectifs généraux de cette partie sont :

- maîtriser le concept de champ scalaire et de champ de vecteurs et manipuler les opérateurs vectoriels relatifs aux champs scalaires et vectoriels ;
- établir le lien entre des lois locales et des propriétés intégrales ;
- évaluer les actions d'un champ magnétique extérieur sur un circuit parcouru par un courant ou par analogie sur un aimant ;
- analyser qualitativement les systèmes où les phénomènes d'induction sont à prendre en compte ;
- conduire des bilans énergétiques mettant en jeu matière et champ électromagnétique ;
- connaître des applications relevant du domaine de l'industrie ou de la vie courante où les phénomènes d'induction sont présents et déterminants dans le fonctionnement des dispositifs ;
- mettre en oeuvre des expériences illustrant la manifestation des phénomènes d'induction.

## 3.1 Transport de charge

*L'étude du transport de charge repose essentiellement sur la notion de bilan de charge électrique, ce qui conduit à la loi locale de conservation charge. Dans le cas d'un milieu conducteur, l'étude s'appuie sur un modèle microscopique. Pour sensibiliser les élèves à l'aspect complexe de la matière, l'enseignant est invité à conduire une critique du modèle historique de Drude en comparant le libre parcours moyen d'un électron libre avec la distance interatomique du réseau. La conductivité électrique est réutilisée lors de l'étude des ondes électromagnétiques dans les conducteurs (effet de peau et réflexion sur un métal).*

| | |
|---|---|
| Densité volumique de charge électrique $\rho$, vecteur densité volumique de courant électrique $\vec{j}$. | On décrit les différents types de porteurs de charge et on fait la distinction entre charges mobiles et charges fixes. On part d'une description microscopique faisant intervenir les porteurs de charges pour aboutir aux grandeurs mésoscopiques $\rho$ et $\vec{j}$. |
| Intensité du courant électrique. | On précise que l'intensité du courant électrique est le flux du vecteur densité volumique de courant électrique à travers une surface orientée. |
| Bilan de charge électrique.<br>Équation locale de la conservation de la charge électrique. | On établit, en coordonnées cartésiennes, l'équation locale traduisant la conservation de la charge électrique.<br>On énonce l'équation locale et on en interprète chacun des termes. |
| Ligne de courant et tube de courant.<br>Caractère conservatif du vecteur densité volumique de courant électrique en régime stationnaire. | On relie le caractère conservatif du vecteur densité volumique de courant électrique en régime stationnaire à la loi des nœuds en électrocinétique dans le cadre de l'ARQS. |
| Loi d'Ohm locale. | On donne la relation entre le vecteur densité volumique de courant et le champ électrique dans un conducteur ohmique.<br>On donne des ordres de grandeur de la conductivité électrique. |
| Modèle de Drude. | On établit une expression de la conductivité élec- |

| | |
|---|---|
| | trique, en régime stationnaire, dans le cadre d'un modèle microscopique. |
| Résistance d'un conducteur cylindrique. | On établit l'expression de la résistance d'un conducteur cylindrique en supposant qu'il est parcouru uniformément par un courant parallèle à son axe. |

## 3.2 Condensateur

*L'étude du condensateur dans la géométrie plane permet d'introduire l'expression de l'énergie volumique du champ électrique. La généralité de cette expression est admise. Aucune notion sur les conducteurs en équilibre électrostatique n'est exigible. La modification de la permittivité introduite par la présence d'un isolant est affirmée sans relation avec une description microscopique de la polarisation.*

| | |
|---|---|
| Approche expérimentale de l'influence électrostatique. | On décrit qualitativement le phénomène d'influence électrostatique. |
| Condensateur plan. Capacité d'un condensateur plan idéal.<br>Rôle des isolants. | On établit l'expression du champ d'un condensateur plan en négligeant les effets de bord et on déduit l'expression de la capacité.<br>On affirme la modification de la permittivité par la présence d'un isolant sans relation avec une description microscopique de la polarisation. |
| Énergie d'un condensateur. Densité volumique d'énergie électrique. | On établit l'expression de la densité volumique d'énergie électrique dans le cas du condensateur plan à partir de celle de l'énergie du condensateur $E = \frac{1}{2}CU^2$. |

## 3.3 Équations deMaxwell

*Les équations de Maxwell sont introduites comme des postulats de l'électromagnétisme. Elles permettent une première approche quantitative du phénomène de propagation et, également, d'évoquer le lien avec l'induction électromagnétique étudiée dans la suite.*

| | |
|---|---|
| Équations de Maxwell dans le vide. | On se limite au cas où le référentiel est considéré galiléen et on insiste sur le contenu physique de ces équations. |
| Relations entre les composantes du champ électromagnétique de part et d'autre d'une interface. | On souligne que les relations de passage se substituent aux équations de Maxwell dans le cas d'une modélisation surfacique ; on fait le lien avec les discontinuités rencontrées sur des exemples vus en PCSI. |
| Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique à la matière. Expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique. | L'expression de la densité d'énergie électromagnétique peut être affirmée sur les exemples du condensateur plan et d'un solénoïde infini. |
| Vecteur de Poynting. Équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique (identité de Poynting). Forme intégrale de la conservation de l'énergie électromagnétique. | On affirme la signification physique du vecteur de Poynting.<br>On interprète l'équation locale de Poynting comme un bilan d'énergie électromagnétique.<br>Sur l'exemple d'un conducteur cylindrique parcouru uniformément par un courant parallèle à son axe, on montre que la puissance fournie par le champ électromagnétique à un conducteur oh- |

| | |
|---|---|
| | mique, est intégralement dissipée par effet Joule. |
| Cas de l'approximation des régimes quasi-permanents (ARQP) ou quasi-stationnaires (ARQS). Limite de validité. Équations de Maxwell dans le cadre de l'ARQP. | On exploite le caractère conservatif du flux du vecteur densité volumique de courant électrique dans l'ARQS, pour interpréter la loi des nœuds et l'uniformité de l'intensité du courant électrique dans une branche d'un circuit. |
| Cas du régime stationnaire.<br>Équation de Poisson pour le potentiel électrostatique.<br>Propriétés topographiques | On se limite à écrire les équations de Maxwell en régime stationnaire et à en déduire les résultats établis en première année.<br>On établit l'équation de Poisson reliant le potentiel électrostatique à la densité volumique de charge électrique.<br>On complète les propriétés topographiques vues en première année en associant l'évasement des tubes de champ à l'évolution de la norme du champ électrique en dehors des sources.<br>On représente les lignes de champ connaissant les surfaces équipotentielles et inversement.<br>On évalue la valeur d'un champ électrique à partir d'un réseau de surfaces équipotentielles. |
| Application à l'étude de l'effet de peau dans un conducteur ohmique ; puissance volumique cédée par le champ.<br>Modèle limite du conducteur parfait. | On définit le modèle limite du conducteur parfait et on dégage un critère de validité de ce modèle mettant en jeu l'épaisseur de peau. |

## 3.4 Forces de Laplace

*Les forces de Laplace dans un circuit mobile sont introduites dans le cas d'un champ uniforme et stationnaire, soit dans le modèle des rails de Laplace, soit dans celui d'un cadre rectangulaire en rotation. L'objectif de cette partie est d'évaluer les actions d'un champ magnétique extérieur sur un circuit parcouru par un courant ou par analogie sur un aimant représenté par un moment magnétique.*

| | |
|---|---|
| Action d'un champ magnétique extérieur sur une distribution volumique de courant : résultante et moment résultant des forces de Laplace. Cas d'un circuit filiforme fermé.<br>Puissance des forces de Laplace. | On différencie le champ magnétique extérieur subi du champ magnétique propre créé par le courant filiforme.<br>La notion de flux coupé ainsi que le théorème de Maxwell ne sont pas au programme. |
| Résultante et puissance des forces de Laplace s'exerçant sur une barre conductrice en translation rectiligne sur deux rails parallèles (rails de Laplace) dans un champ magnétique extérieur uniforme, stationnaire et orthogonal aux rails. | On établit l'expression de la résultante et on évalue la puissance des forces de Laplace. |
| Couple et puissance des actions mécaniques de Laplace dans le cas d'une spire rectangulaire, parcourue par un courant, en rotation autour d'un axe de symétrie de la spire passant par les deux milieux de côtés opposés et placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire orthogonal à l'axe. | On établit l'expression du couple et on évalue la puissance des forces de Laplace. |
| Action d'un champ magnétique extérieur uniforme sur un aimant. Positions d'équilibre et stabilité. | On associe à un aimant un moment magnétique. |

| | |
|---|---|
| Effet moteur d'un champ magnétique tournant. | On étudie l'effet d'un champ magnétique tournant sur un dipôle magnétique permanent. |

## 3.5 Induction électromagnétique

*Dans cette partie, on cherche à mettre l'accent sur les applications relevant du domaine de l'industrie ou de la vie courante où les phénomènes d'induction sont présents et déterminants dans le fonctionnement des dispositifs. Elle s'appuie sur les nombreuses applications présentes dans notre environnement immédiat : boussole, moteur électrique, alternateur, transformateur, haut-parleur, plaques à induction, frein électromagnétique, carte RFID (Radio Frequency IDentification)...*

*Cette partie se prête parfaitement à une introduction expérimentale et constitue un bel exemple d'illustration de l'histoire des sciences. On évoque, à ce sujet, les différents points de vue possibles sur le même phénomène selon le référentiel dans lequel on se place. L'étude d'un circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps aborde le phénomène d'auto-induction puis le couplage par mutuelle inductance entre deux circuits fixes. Elle traite du modèle du transformateur de tensions. L'étude d'un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire est centrée sur la conversion de puissance. Des situations géométriques simples permettent de dégager les paramètres physiques pertinents afin de modéliser, par exemple, un dispositif de freinage.*

| | |
|---|---|
| **Flux d'un champ magnétique** | |
| Flux d'un champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour (courbe fermée) orienté. | |
| **Lois d'induction électromagnétique** | |
| Conservation du flux magnétique<br>Loi de FARADAY<br>Courant induit par le déplacement relatif d'une boucle conductrice par rapport à un aimant ou un circuit inducteur. Sens du courant induit. Force électromotrice induite, loi de FARADAY :<br>$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$ | On réalise des expériences de cours pour illustrer les lois de l'induction.<br>On présente les causes de la variation de flux magnétique. On précise les conventions d'algébrisation du flux magnétique, de la f.é.m. induite et du courant induit.<br>On évite les situations où la loi de FARADAY n'est pas applicable. |
| **Loi de modération de LENZ** | |
| | On réalise des expériences de cours pour illustrer la loi de LENZ.<br>On utilise la loi de LENZ pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.<br>On précise la signification physique du signe (-) dans la loi de FARADAY. |
| **Auto-induction** | |
| flux propre et inductance propre. Inductance mutuelle entre deux bobines.<br>Circuits électriques à une maille, couplés par le phénomène de mutuelle induction en régime sinusoïdal forcé.<br>Bilan énergétique de l'établissement du courant dans un ensemble de deux circuits filiformes fermés indéformables et fixes : énergie magnétique.<br>Densité volumique d'énergie magnétique.<br>Couplage partiel, couplage parfait. | Le théorème de NEUMANN ($M_{12} = M_{21}$ ) est simplement affirmé.<br>On détermine l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en "influence totale".<br>On exprime l'énergie magnétique en fonction des coefficients d'inductance et des intensités.<br>On vérifie sur l'exemple du solénoïde long la cohérence de cette expression de l'énergie magnétique avec celle qui a été obtenue à partir des équations |

deMAXWELL.
On établit l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique dans le cas d'une bobine dont on néglige les effets de bord à partir de la relation $E = \frac{1}{2}LI^2$.
On établit la relation $M \leqslant \sqrt{L_1 L_2}$ dans le cas de deux bobines couplées et on affirme le résultat pour deux circuits quelconques en interaction mutuelle.

**Applications**

- Rails de LAPLACE dans un champ magnétique extérieur uniforme, stationnaire et orthogonal aux rails.
- Spire rectangulaire soumise à un champ magnétique extérieur uniforme et en rotation uniforme autour d'un axe fixe orthogonal au champ magnétique.
- Freinage par induction.
- Courants de FOUCAULT.
- Moteur à courant continu à entrefer

On interprète qualitativement les phénomènes observés.
On écrit les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe.
On explique le principe du freinage par induction et on en donne des exemples d'utilisation.
On traite la distribution des courants de FOUCAULT dans le cas d'un conducteur cylindrique soumis à un champ magnétique parallèle à son axe, uniforme et oscillant. On exprime la puissance dissipée par effet JOULE en négligeant le champ propre et on explique le rôle du feuilletage.
On analyse le fonctionnement du moteur à courant continu à entrefer plan en s'appuyant sur la configuration des rails de LAPLACE. On indique que ce dispositif est utilisé dans certaines applications telles que les vélos électriques, les ordinateurs ou pour actionner les pompes à sang en médecine.

## 3.6 Milieux ferromagnétiques

*L'objectif de cette partie est d'introduire les concepts nécessaires aux cours de la conversion électromagnétique statique. Elle conduit à une réécriture de l'équation de MAXWELL-AMPERE, plus adaptée à l'étude des milieux magnétiques.*

*L'électrostatique des milieux diélectriques étant hors programme, aucun calcul des champs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ n'est demandé.*

Aimant permanent, champ magnétique créé dans son environnement.

On se base sur la formule exprimant le champ d'un dipôle magnétique pour décrire le champ créé par un aimant à grande distance et on représente qualitativement les lignes de champ magnétique.

Actions subies par un dipôle magnétique dans un champ magnétique extérieur.

On utilise les expressions de l'énergie potentielle, de la résultante et du moment fournies, pour décrire qualitativement l'évolution d'un dipôle magnétique dans un champ magnétique extérieur.

Magnéton de BOHR.

On établit l'expression du magnéton de BOHR dans le cadre du modèle de BOHR.

Vecteur aimantation $\vec{M}$ ; notions élémentaires sur les, courants d'aimantation ; vecteur excitation magnétique $\vec{H}$.

On associe à une distribution d'aimantation une densité volumique de courants liés équivalente, l'expression étant admise.

Équation de MAXWELL-AMPERE écrite avec le vecteur excitation magnétique.

On interprète qualitativement que les sources de l'excitation magnétique sont les courants élec-

| | |
|---|---|
| | triques libres, et que celles de champ magnétique sont les courants électriques libres et l'aimantation. |
| Vecteur aimantation dans un milieu LHI.<br>Expression de la perméabilité magnétique relative d'un milieu LHI.<br>Exemples de milieux LHI. | |
| Milieu ferromagnétique.<br>Milieu ferromagnétique doux.<br>Perméabilité magnétique relative.<br>Modélisation d'un milieu doux par une relation constitutive linéaire. | On donne l'allure des cycles d'hystérésis (excitation magnétique, aimantation) et (excitation magnétique, champ magnétique) d'un milieu ferromagnétique.<br>On distingue milieu dur et milieu doux.<br>On cite des exemples de matériaux.<br>On donne l'ordre de grandeur de la perméabilité magnétique relative. |
| Circuit magnétique avec ou sans entrefer. Champ magnétique produit dans l'entrefer d'un électroaimant. | On donne l'allure des lignes de champ dans un circuit magnétique en admettant que les lignes de champ sortent orthogonalement à l'interface dans un entrefer. |
| Électroaimant. | On exprime le champ magnétique produit dans l'entrefer d'un électroaimant. |
| Inductance propre d'une bobine à noyau de fer doux modélisé linéairement.<br>Pertes d'une bobine réelle à noyau : pertes fer par courants de FOUCAULT et par hystérésis, pertes cuivre. | On établit l'expression de l'inductance de la bobine à noyau et on l'utilise pour vérifier l'expression de l'énergie magnétique emmagasinée<br>$E_{magn} = \iiint \frac{1}{2\mu_o\mu_r} B^2 \, d\tau$<br>On exprime le lien entre l'aire du cycle d'hystérésis et la puissance moyenne absorbée. |

## 4 Conversion de puissance

L'enseignement de cette partie fait appel à une approche synthétique de phénomènes d'électromagnétisme et d'électronique concernant la transmission de puissance. L'objectif est de faire comprendre les concepts physiques mis en oeuvre dans ces phénomènes. Il s'agit donc d'un enseignement général portant sur des connaissances bien délimitées. Toute spécification technique est exclue et strictement hors programme. En particulier les courants triphasés et la notion de puissance réactive ne sont pas au programme. On souligne le rôle essentiel du fer et de l'aimantation du milieu dans le calcul des actions. De même, on insiste sur la nécessité d'une forte perméabilité du noyau d'un transformateur pour expliquer les relations entre les courants ou les tensions mis en jeu.

Les objectifs généraux de cette partie sont :

- réaliser des bilans d'énergie ;
- appliquer l'électromagnétisme à des problématiques industrielles ;
- élaborer des modèles, analyser des limitations et des défauts ;
- associer divers éléments (sources, convertisseurs) afin de concevoir une chaîne énergétique complète.

## 4.1 Conversion électromagnétique statique

Couplage parfait de deux bobines à l'aide d'un circuit ferromagnétique torique. Fonctionnement linéaire et sans fuites. Flux magnétique commun.

Application au modèle de transformateur parfait : rapports de transformations en tension et en intensité. Transfert d'impédance.

Les pertes et les défauts sont évoqués mais ne sont pas modélisés. En particulier, l'inductance magnétisante est hors programme.

On établit les lois de transformation des tensions et des courants du transformateur parfait, en respectant l'algébrisation associée aux bornes homologues.
On explique l'intérêt du transport de l'énergie électrique à haute tension afin de réduire les pertes en ligne. On signale l'avantage d'un facteur de puissance élevé.
On décrit des solutions permettant de réduire les pertes fer.
On explique le rôle du transformateur d'isolement.

## 4.2 Conversion électromécanique

### Contacteur électromagnétique en translation

Énergie et force électromagnétique d'un enroulement enlaçant un circuit magnétique présentant un entrefer variable. Fonctionnement d'un contacteur électromagnétique.

La notion de coénergie est hors programme.
On admet l'expression $F = \left(\partial E/\partial x\right)_i$ de la force électromagnétique calculée à partir de l'énergie magnétique.
Pour expliquer son fonctionnement, on assimile le contacteur électromagnétique à un relai.

### Machine synchrone

Structure d'un moteur synchrone diphasé et bipolaire.
Champ magnétique dans l'entrefer.
Champ glissant statorique.
Champ glissant rotorique.
Énergie et couple.
Condition de synchronisme.
Stabilité du système.
On décrit qualitativement le principe de l'autopilotage.
Modèle électrique de l'induit.
Bilan énergétique.
Réversibilité d'une machine synchrone.

On se limite au cas du moteur à pôles lisses et à excitation séparée.
On se place dans le cas d'une machine de perméabilité infinie à entrefer constant. On explique qualitativement que, dans l'entrefer, on peut obtenir un champ magnétique à dépendance angulaire sinusoïdale par association de plusieurs spires décalées.
On justifie l'existence d'un champ glissant statorique par le fait que les deux phases sont alimentées en quadrature, puis on montre que le champ glissant rotorique est lié à la rotation de l'inducteur.
On exprime l'énergie magnétique emmagasinée en fonction de la position angulaire du rotor.
L'expression $\Gamma = \left(\partial E/\partial \theta\right)_i$ du moment électromagnétique est admise.
On signale la particularité du démarrage et du contrôle de la vitesse d'un moteur synchrone.
On décrit qualitativement le principe de l'autopilotage.
Les expressions des coefficients d'inductance sont admises. En tenant compte uniquement des pertes cuivre, on justifie l'égalité entre la puissance électrique absorbée par les f.c.é.m. et la puissance mécanique fournie. On donne la représentation de

| | |
|---|---|
| | FRESNEL associées.<br>On cite quelques exemples d'application des machines synchrones. |

**Machine à courant continu**

| | |
|---|---|
| Structure d'un moteur à courant continu bipolaire à excitation séparée.<br>Collecteur. | On se limite au moteur à courant continu à pôles lisses.<br>On fait l'analogie avec le moteur synchrone pour expliquer que le collecteur assure le synchronisme entre le champ statorique stationnaire et le champ rotorique quelle que soit la position angulaire du rotor. |
| Couple $\Gamma = \Phi i$ et f.c.é.m. $e = \Phi\Omega$.<br>Équations électrique et mécanique.<br>Caractéristique $(\Omega, \Gamma)$.<br>Réversibilité d'une machine à courant continu. | On se limite à moteur à courant continu à pôles lisses.<br>On fait l'analogie avec le moteur synchrone pour expliquer que le collecteur assure le synchronisme entre le champ statorique stationnaire et le champ rotorique quelle que soit la position angulaire du rotor.<br>L'expression du couple $\Gamma = \Phi i$ est admise.<br>On analyse le démarrage d'un moteur entraînant une charge mécanique exerçant un moment de la forme $\Gamma = -f\Omega$.<br>On donne quelques exemples d'application de machines à courant continu. |

## 4.3 Conversion électronique

| | |
|---|---|
| Formes continue et alternative de la puissance électrique.<br>Transfert de puissance entre une source et une charge : rendement.<br>Ordre de grandeur des puissances mises en jeu. Nécessité de la commutation et d'éléments de réserve d'énergie : interrupteurs, inductances et capacités. | On cite des exemples illustrant la nécessité d'une conversion de puissance électrique.<br>On rappelle la continuité de l'énergie et ses conséquences sur la continuité du flux magnétique et de la charge électrique. |
| Interrupteurs idéaux. Fonctions de commutation : fonction diode à commutation spontanée à l'amorçage et au blocage, fonction transistor à commutation commandée à l'amorçage et au blocage. | On ne considère que des interrupteurs idéaux : courant nul dans l'interrupteur bloqué (ouvert), tension nulle aux bornes de l'interrupteur amorcé (fermé). L'étude des limites du modèle idéal et des pertes de puissance n'est pas au programme.<br>Les diodes et les transistors ne seront considérés que sous leurs aspects fonctionnels de commutation.<br>Toute considération technologique est hors programme. |
| Modélisation des générateurs et récepteurs par des sources de courant ou de tension. Sources parfaites, puissance échangée. | La conversion entre sources non parfaites ainsi que la décomposition de FOURIER de la puissance sont exclues du programme. On signale l'intérêt de condensateurs ou de bobines pour parfaire une source.<br>On caractérise les sources par leur réversibilité en tension, en intensité, en puissance et on cite des exemples. |

| | |
|---|---|
| Transfert de puissance entre un générateur et un récepteur : règle d'association.<br>Hacheur.<br>Application au transfert de puissance entre un générateur de tension continue et un récepteur de courant continu par une cellule à deux interrupteurs : Chronogrammes. Valeurs moyennes des signaux | On explique le fonctionnement d'une cellule élémentaire à deux interrupteurs assurant le transfert d'énergie entre une source de tension et une source de courant.<br>La connaissance des circuits de commande est hors programme.<br>On traite l'ondulation en intensité dans l'approximation d'un hachage haute fréquence réalisant une intensité affine par morceaux.<br>On illustre l'intérêt de cette conversion pour assurer la variation de vitesse d'une machine à courant continu.<br>On décrit les différentes séquences de commutation des diodes pour un générateur de tension sinusoïdal alimentant une charge assimilable à une source continue de courant. |
| Redressement double alternance réalisé avec un pont de diodes.<br>Onduleur. | On décrit la structure en pont à quatre interrupteurs et les séquences de commutation pour une fréquence de commutation fixe.<br>On étudie, pour un générateur de tension continue et une charge (R, L), la réalisation d'une intensité quasi sinusoïdale par modulation de largeur d'impulsion. |

# 5 Physique des ondes

L'enseignement de cette partie est basé sur une approche synthétique : les concepts sont introduits sur un exemple et utilisés ensuite dans d'autres cas.

Les objectifs généraux de cette partie sont :

- comprendre le rôle joué par une équation différentielle dans l'étude de l'évolution temporelle d'un système physique ;
- relier linéarité et superposition ;
- interpréter physiquement et savoir reconnaître la forme analytique d'un signal qui se propage ;
- relier conditions aux limites et quantification, conditions aux limites et décomposition en ondes stationnaires ;
- dégager les similitudes de comportement entre systèmes analogues par une mise en équation pertinente utilisant variables réduites et paramètres caractéristiques adimensionnés.

## 5.1 Phénomènes de propagation unidimensionnels non dispersifs

| | |
|---|---|
| Ondes transversales sur une corde vibrante. Équation d'onde.<br>Solutions de l'équation de d'ALEMBERT sous forme d'onde plane progressive. | On se limite aux petits mouvements d'une corde sans raideur dans un plan fixe. |
| Cas particulier de l'onde plane progressive harmonique : déphasage, double périodicité spatiale et temporelle. Vecteur d'onde. | On souligne le caractère idéal du modèle de l'onde plane harmonique et on montre simplement (grâce à l'analyse de FOURIER) qu'une telle onde constitue une composante élémentaire d'un paquet d'ondes.<br>On fait apparaître le rôle simplificateur de la nota- |

| | |
|---|---|
| | tion complexe pour les ondes progressives harmoniques. |
| Interférences entre deux ondes mécaniques de même fréquence. | On utilise la représentation de FRESNEL pour déterminer l'amplitude de l'onde résultante en un point en fonction du déphasage.<br>On exprime les conditions d'interférences constructives ou destructives et on détermine l'amplitude de l'onde résultante en un point en fonction du déphasage. |
| Ondes stationnaires. | On introduit la méthode de séparation des variables.<br>On détermine les positions relatives des ventres et des nœuds de vibrations.<br>On montre qu'on peut décomposer une onde stationnaire en ondes progressives et vice-versa. |
| Oscillations libres d'une corde fixée à ses extrémités : modes propres. Oscillations forcées d'une corde fixée à une extrémité (corde de MELDE) : ondes stationnaires, résonance. | |
| Ondes de tension et de courant dans un câble coaxial sans pertes. Impédance caractéristique.<br>Réflexion en amplitude sur une impédance terminale. | On établit les équations de propagation dans le câble coaxial modélisé comme un milieu continu, caractérisé par une inductance linéique et une capacité linéique.<br>On étudie la réflexion en amplitude de tension pour une impédance terminale nulle, infinie ou résistive. |

## 5.2 Ondes sonores dans les fluides

| | |
|---|---|
| Mise en équation des ondes acoustiques dans l'approximation acoustique, équation de d'ALEMBERT, célérité, caractère longitudinal.<br>Ondes planes progressives.<br>Domaine fréquentiel des ondes sonores. | On s'appuie sur les notions introduites pour les phénomènes unidimensionnels, tout en soulignant les apports nouveaux liés au caractère tridimensionnel.<br>On justifie les hypothèses de l'approximation acoustique par des ordres de grandeur.<br>On adopte la description eulérienne en liaison avec le cours de mécanique des fluides. On suppose l'écoulement parfait.<br>On exprime la célérité en fonction de la température pour un gaz parfait. On donne les ordres de grandeur de la célérité pour l'air et pour l'eau. |
| Structure d'ondes planes progressives harmoniques, impédance acoustique. | On définit l'impédance acoustique comme le rapport de la surpression sur la vitesse. Aucune autre définition de l'impédance acoustique ne peut être exigée. |
| Aspects énergétiques : densité volumique d'énergie sonore, vecteur densité de courant énergétique, bilan énergétique de la propagation d'une onde sonore. Intensité sonore. Niveau sonore.<br>Réflexion, transmission d'une onde sonore plane progressive sur une interface plane, sous incidence normale. Conditions aux limites.<br>Cœfficients de réflexion et de transmission des vi- | Les expressions du vecteur densité de courant énergétique et de la densité volumique d'énergie associés à la propagation de l'onde sont admises.<br>On donne quelques ordres de grandeur de niveaux d'intensité sonore. |

| | |
|---|---|
| tesses, des surpressions et des puissances sonores. | |
| Adaptation des impédances. | On relie l'adaptation des impédances au transfert maximum de puissance.<br>On signale l'utilisation des ondes ultra-sonores pour l'échographie médicale. |
| Onde sonore sphérique harmonique divergente. | On commente l'expression de la surpression $p(r,t) \propto \frac{1}{r}\cos(\omega(t-r/c))$ générée par une sphère pulsante. |
| Effet Doppler pour les ondes sonores. | On présente le principe d'une détermination de vitesse par effet Doppler. |

## 5.3 Ondes électromagnétiques dans le vide

| | |
|---|---|
| Équations de propagation du champ électromagnétique dans une région sans charges ni courants.<br>Onde plane. Structure de l'onde plane progressive.<br>Cas particulier de l'onde monochromatique (harmonique ou sinusoïdale).<br>Domaines spectraux et applications des ondes électromagnétiques.<br>Relation entre le flux du vecteur de Poynting et le flux de photons. | On associe à chaque domaine du spectre des ondes électromagnétiques des applications.<br>On fournit la relation d'Einstein-Planck et on l'utilise pour établir la correspondance entre le flux de photons et le flux du vecteur de Poynting.<br>On donne quelques ordres de grandeur de flux énergétiques surfaciques moyens (laser hélium-néon, flux solaire). |
| États de polarisation d'une onde plane progressive monochromatique.<br>Polarisation rectiligne d'une onde plane progressive monochromatique.<br>Loi de Malus. | Les polariseurs et les lames à retard sont introduits de façon simple en TP. |
| Réflexion d'une onde électromagnétique polarisée rectilignement sur un conducteur parfait, en incidence normale.<br>Pression de radiation. | On exploite la continuité de la composante tangentielle du champ électrique pour justifier l'existence d'une onde réfléchie et calculer celle-ci.<br>On établit l'expression du champ électromagnétique de l'onde réfléchie et du vecteur densité de courant surfacique. On calcule le coefficient de réflexion en puissance.<br>On détermine la pression de radiation à l'aide de l'expression de la force de Laplace. |

## 5.4 Phénomènes linéaires de propagation unidimensionnels dispersifs

| | |
|---|---|
| Relation de dispersion, vitesse de phase, vitesse de groupe, dispersion, absorption.<br>Paquet d'ondes ; vitesse de groupe. Domaine spectral d'un paquet d'onde de durée finie. | Ces notions sont introduites sur un exemple de phénomène unidimensionnel linéaire.<br>On insiste sur l'intérêt de la décomposition en ondes planes proportionnelles à $\exp(i(\omega t - kx))$ avec réel et a priori complexe pour le traitement des phénomènes de propagation linéaires. |
| Propagation d'une onde plane transverse progressive harmonique dans un plasma.<br>Fréquence de coupure. Dispersion, vitesse de phase et vitesse de groupe. Conductivité imaginaire pure. Interprétation énergétique.<br>Équation de propagation dans le plasma. Onde | On considère un plasma comme un milieu dilué localement neutre, dont les charges sont sans interaction entre elles et où les ions sont immobiles.<br>On décrit le modèle de la conduction électrique dans un plasma et on construit une conductivité complexe en justifiant les approximations. |

plane progressive harmonique dans le plasma. Onde évanescente dans le domaine réactif ; absence de propagation de l'énergie.

On associe le caractère imaginaire pur de la conductivité complexe à l'absence de puissance échangée entre le champ et les porteurs.
On relie la fréquence de coupure aux caractéristiques du plasma et on cite son ordre de grandeur dans le cas de l'ionosphère.

## 6 Optique

On se restreint au domaine d'approximation où une description par des ondes scalaires est suffisante. Le théorème de Malus-Dupin, outil nécessaire à l'étude de l'optique ondulatoire, est admis.

On signale le caractère très général des phénomènes d'interférences et de diffraction étudiés en optique en insistant notamment sur le rôle des ordres de grandeur des longueurs d'onde rencontrées dans les différents domaines de la physique ondulatoire. On évite les démonstrations mathématiques compliquées.

Toute étude générale de la cohérence est exclue.

Les objectifs généraux de cette partie sont :

- maîtriser la notion de phase d'une vibration harmonique et de sa variation au cours d'une propagation ;
- associer les caractéristiques géométriques d'un phénomène d'interférences (position et forme des franges, interfrange) à celles du dispositif interférentiel et du milieu de propagation ;
- connaître certains ordres de grandeur propres aux phénomènes lumineux dans le domaine du visible (longueur d'onde, temps de cohérence, temps de réponse d'un récepteur) ; faire le lien avec les problèmes de cohérence ;
- maîtriser les outils de l'optique géométrique (rayon lumineux, loi du retour inverse, relations de conjugaison) et de l'optique ondulatoire (chemin optique, surface d'onde, théorème de Malus-Dupin) afin de conduire un calcul de différence de marche entre deux rayons lumineux dans des situations simples ;
- savoir utiliser simplement une lame à retard.

### 6.1 Interférences de deux ondes cohérentes

Modèle scalaire des ondes lumineuses. Chemin optique le long d'un rayon lumineux et retard de phase associé. Surfaces d'onde (ou équiphases). Onde plane, onde sphérique ; effet d'une lentille mince dans l'approximation de Gauss. Théorème de Malus-Dupin. Récepteurs. Éclairement ou intensité lumineuse. Densité spectrale.

On admet qu'une onde lumineuse monochromatique peut être décrite par une onde scalaire progressive, composante du champ électrique, qui se propage le long du rayon lumineux.
On définit les surfaces d'ondes relatives à une source ponctuelle S par l'ensemble des points M tels que (SM) = constante. Le théorème de Malus-Dupin est admis.
On donne l'ordre de grandeur du temps de réponse de quelques récepteurs de lumière et on évoque leurs conséquences sur la détection des signaux lumineux.

Superposition de deux ondes lumineuses. Cohérence mutuelle. Formule de Fresnel :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi)$$

On compare les prévisions théoriques et les réalités expérimentales et on affirme les conditions d'interférence. La notion de train d'onde est hors programme.

| | |
|---|---|
| Diviseurs d'ondes. Champ d'interférence, surfaces d'égale intensité, frange d'interférence, différence de marche, ordre d'interférence, facteur de contraste (ou visibilité). | |
| **Application** | |
| trous d'Young ponctuels dans un milieu non dispersif : source à distance finie et observation à grande distance finie et à l'infinie.<br>Perte de contraste par élargissement angulaire de la source. | On justifie que les franges ne sont pas localisées.<br>On affirme et on utilise le critère semi-qualitatif de brouillage des franges $\Delta p \geqslant 1/2$ (où $\Delta p$ est évalué sur la moitié de l'étendue de la source) pour interpréter des observations expérimentales.<br>L'étude de tout dispositif interférentiel autre que les trous d'Young n'est pas exigible. |
| Interférence en lumière blanche. | On interprète qualitativement la figure d'interférence en lumière blanche. |

## 6.2 Étude du réseau plan

*L'étude de la superposition de $N$ ondes cohérentes ne doit pas donner lieu à des développements calculatoires. On présente expérimentalement le phénomène de diffraction et on montre son influence sur le pouvoir de résolution.*

| | |
|---|---|
| Superposition de $N$ ondes quasi monochromatiques cohérentes entre elles, de même amplitude et dont les phases sont en progression arithmétique.<br>Relation fondamentale des réseaux. | On établit l'expression de la différence de marche entre deux motifs consécutifs.<br>On établit la relation fondamentale des réseaux liant la condition d'interférences constructives à la valeur de la différence de marche entre deux motifs consécutifs.<br>On établit, à l'aide du diagramme de Fresnel, la demi-largeur $2\pi/N$ des pics principaux de la courbe d'intensité en fonction du déphasage.<br>Le calcul de l'intensité lumineuse est hors programme. |
| Diffraction à l'infini | On décrit qualitativement l'influence de la diffraction (On utilise la relation $\theta \simeq \lambda/d$ entre l'échelle angulaire du phénomène de diffraction et la taille caractéristique de l'ouverture). |
| Minimum de déviation dans un ordre donné. | On souligne qualitativement l'intérêt expérimental du minimum de déviation. |
| Dispersion par le réseau dans un ordre donné : spectre d'ordre $p$.<br>Pouvoir dispersif d'un réseau. | On interprète les positions des raies observées comme résultant d'une condition d'interférences constructives.<br>On définit le pouvoir dispersif d'un réseau en comparant différent réseaux. |
| Pouvoir de résolution. Critère de Rayleigh. | On définit le pouvoir de résolution et on indique les facteurs qui le limitent :<br>◆ pouvoir séparateur du détecteur ;<br>◆ influence de la diffraction. |

# 7 Thermodynamique

Le cours de thermodynamique en deuxième année PSI est consacré à la conduction (ou diffusion) thermique et à la diffusion de particules en relation avec le cours de thermodynamique de première année. Il est souhaitable, à l'occasion d'exercices ou de problèmes, de reprendre certains acquis de thermodynamique (en particulier les premier et second principes) enseignés en première année.

On souligne les analogies et les différences entre les différents phénomènes de transport abordés : diffusion thermique, diffusion de particules et conduction électrique.

L'étude de la conduction thermique contribue aussi à consolider la maîtrise d'outils mathématiques puissants (divergence, laplacien) dans un contexte concret.

Les objectifs généraux de cette partie sont :

- identifier la nature des transferts thermiques ;
- effectuer un bilan local et global d'énergie interne pour un solide dans le cas d'une situation à une variable d'espace en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique ;
- analyser et résoudre des équations aux dérivées partielles (analyse en ordre de grandeur, conditions initiales, conditions aux limites).

## 7.1 Conduction thermique

*Le cours de conduction thermique permet un réinvestissement du cours de thermodynamique de PCSI et contribue à asseoir les compétences correspondantes.*

*L'établissement de l'équation de la diffusion thermique est limité au cas des solides ; il est possible d'utiliser les résultats établis dans d'autres situations, notamment dans le cas de l'étude des fluides, en affirmant la généralisation des équations obtenues dans le cas des solides. Les mises en équations locales sont faites exclusivement sur des géométries où une seule variable d'espace intervient. On admet ensuite les formes générales des équations en utilisant les opérateurs d'analyse vectorielle. Enfin, aucune connaissance spécifique sur les solutions d'une équation de diffusion ne figure au programme.*

*La loi de Newton à l'interface entre un solide et un fluide est introduite.*

| | |
|---|---|
| Les modes de transfert thermique d'énergie : conduction, convection et rayonnement.<br>Flux thermique.<br>Vecteur densité de flux thermique $\vec{j}_Q$. | |
| Équilibre thermodynamique local. | On énonce l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local et on utilise les champs scalaires intensifs (volumiques ou massiques) associés à des grandeurs extensives de la thermodynamique. |
| Loi phénoménologique de Fourier relative à la conduction thermique. | On souligne l'analogie entre les lois phénoménologiques d'Ohm et de Fourier.<br>Toute modélisation microscopique de la loi de Fourier est hors programme.<br>On donne des ordres de grandeur de la conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, verre, acier... |
| Bilan d'énergie thermique.<br>Équation de la diffusion thermique. Linéarité de l'équation de diffusion. Relation de l'équation de diffusion avec l'irréversibilité temporelle du phénomène. | On établit, à l'aide du premier principe appliqué à un volume élémentaire l'équation de la diffusion thermique, avec ou sans terme source.<br>On donne le terme source local et intégral correspondant à l'effet Joule. |

| | |
|---|---|
| | On se limite à des problèmes unidimensionnels en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique. On admet et on utilise une généralisation en géométrie quelconque en utilisant les opérateurs divergence et laplacien et leurs expressions fournies. Aucune méthode de résolution de cette équation ne peut être supposée connue. |
| Analyse dimensionnelle. | On analyse l'équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. *Activité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'EULER explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.* |
| Conditions aux limites : continuité du flux thermique, continuité de la température pour un contact thermique parfait, loi de NEWTON. Cœfficient de transfert thermique de surface $h$. | Les transferts thermiques à l'interface entre un fluide et une paroi solide sont décrits par l'expression phénoménologique $\varphi = h(T_{\text{paroi}} - T_{\text{fluide}})$, appelée loi de NEWTON. |
| Conduction thermique en régime stationnaire, conductance et résistance thermiques. Associations de résistances thermiques en série ou en parallèle. | On signale les analogies avec le calcul des conductances électriques et on énonce les conditions d'application de l'analogie. Seule la mémorisation de l'expression de la résistance thermique d'un barreau cylindrique calorifugé latéralement est exigible. |
| ARQS, analogie électrocinétique avec un circuit RC. | On met en évidence un temps caractéristique d'évolution de la température, on justifie l'ARQS et on établit l'analogie avec un circuit électrique RC. |
| **Ondes thermiques** | |
| Régime sinusoïdal forcé : onde plane de diffusion thermique. Relation de dispersion. Effet de peau thermique. | On fait le lien avec l'étude générale des phénomènes de propagation dispersif. On met en évidence le déphasage lié à la propagation et on établit une distance caractéristique d'atténuation. |

## 7.2 Diffusion de particules

*On traite cette partie par analogie avec le phénomène de transport de charge et de conduction thermique. On peut également utiliser la loi de FICK pour interpréter les paliers de diffusion en électrochimie*

| | |
|---|---|
| Les différents modes de transfert de masse : diffusion et convection. | |
| Vecteur densité de courant de particules $\vec{j}_N$. | |
| Bilan de particules. Loi phénoménologique de FICK. Équation de diffusion. | On précisera que la diffusion particulaire traduit une situation d'un système hors-équilibre. Toute modélisation microscopique de la loi de FICK est hors-programme. Aucune méthode de résolution de l'équation de la diffusion ne peut être supposée connue. |

# ANNEXES

## 1 Liste de matériel

Le standard national du matériel des CPGE donne la liste globale et détaillée du matériel nécessaire à la mise en oeuvre du programme de physique et chimie en ces classes.

Le tableau ci-dessous donne le matériel nécessaire à la mise en oeuvre des programmes et que les élèves doivent savoir utiliser lors d'une évaluation pratique avec l'aide d'une notice simplifiée. Une utilisation de matériel hors de cette liste lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'instructions appropriées et d'une introduction guidée suffisamment détaillée.

| Domaine | Matériel |
|---|---|
| 1. Optique | ■ goniomètre ;<br>■ viseur à frontale fixe ;<br>■ lunette auto-collimatrice ;<br>■ spectromètre à fibre optique ;<br>■ laser à gaz et diode laser ;<br>■ sources de lumière spectrales ;<br>■ source de lumière blanche à condenseur. |
| 2. Électronique | ■ oscilloscope numérique ;<br>■ carte d'acquisition et logiciel dédié ;<br>■ générateur de signaux électrique Basse Fréquence avec modulation interne en fréquence et sortie d'une tension image de la fréquence ;<br>■ alimentation stabilisée en tension ;<br>■ multimètre numérique ;<br>■ multiplieur analogique ;<br>■ microcontrôleur. |
| 3. Ondes | ■ émetteur et récepteur d'ondes électromagnétiques<br>■ câble coaxial ;<br>■ émetteur et récepteur acoustique (domaine audible et domaine ultrasonore). |
| 4. Mécanique | ■ stroboscope ;<br>■ appareil photo numérique ;<br>■ pendule simple et pendule pesant ;<br>■ chute libre. |
| 5. Thermodynamique | ■ capteur de pression ;<br>■ webcam avec logiciel dédié ;<br>■ caméra thermique ;<br>■ thermomètre ;<br>■ thermocouple ;<br>■ thermistance ;<br>■ capteur infra-rouge. |

| | |
|---|---|
| **6. Électromagnétisme** | ■ teslamètre ;<br>■ balance de Coton. |

## 2 Outils mathématiques pour la physique

*L'utilisation d'outils mathématiques est indispensable en sciences physiques. La capacité à mettre en oeuvre de manière autonome certains de ces outils mathématiques dans le cadre des activités relevant de la physique fait partie des compétences exigibles à la fin de la première année. Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que le niveau de maîtrise attendu en fin de première année. Il est complété dans le programme de seconde année. Cependant les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité sont traitées à l'aide d'outils numériques (calculatrices, logiciels de calcul numérique).*

| Programme | Savoir-faire mathématiques exigibles |
|---|---|
| **Équations algébriques :** | |
| Systèmes linéaires de $n$ équations à $p$ inconnues. | Identifier les variables (inconnues) nécessaires à la modélisation du problème sous forme d'un système d'équations linéaires. On donne l'expression formelle des solutions dans le seul cas $n = p = 2$. |
| Équations non linéaires. | Représenter graphiquement une équation de la forme $f(x) = g(x)$ et on interprète graphiquement la ou les solutions. |
| **Équations différentielles linéaires et non linéaires :** | |
| Équations différentielles linéaires à coefficients constants. Identifier l'ordre d'une équation différentielle. Forme canonique.<br>Mettre l'équation sous forme canonique.<br>Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants :<br>$$y' + ay = f(x)$$<br>Équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants :<br>$$y" + ay' + by = f(x)$$<br>Autres équations différentielles d'ordre 1 ou 2.<br>Exemples d'équations différentielles non linéaires | Identifier l'ordre d'une équation différentielle.<br>Mettre l'équation sous forme canonique.<br>Trouver la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène).<br>Trouver l'expression des solutions lorsque $f(x)$ est constante ou de la forme $A\cos(\omega t+\varphi)$ (en utilisant la notation complexe).<br>Utiliser l'équation caractéristique pour trouver la solution générale de l'équation sans second membre.<br>Prévoir le caractère borné ou non de ses solutions (critère de stabilité).<br>Trouver l'expression des solutions lorsque $f(x)$ est constante ou de la forme $A\exp(\lambda x)$ avec $\lambda$ complexe. Trouver la solution de l'équation complète correspondant à des conditions initiales données. Représenter graphiquement cette solution.<br>Obtenir une intégrale première d'une équation de Newton $x" = f(x)$ et l'exploiter graphiquement.<br>Séparer les variables d'une équation du premier ordre à variables séparables.<br>Faire le lien entre les conditions initiales et le graphe de la solution correspondante. |
| **Fonctions :** | |
| Fonctions usuelles. | Exponentielle, logarithme népérien et décimal, co- |

| | |
|---|---|
| Dérivée. Dérivée d'une fonction composée. Dérivée temporelle d'une fonction, notation $dx/dt$<br>Développement limité d'une fonction d'une variable au voisinage d'une valeur de la variable. Formule de TAYLOR à l'ordre un ou deux ; interprétation graphiquement.<br>Primitive et intégrale. Valeur moyenne. Représentation graphique d'une fonction. | sinus, sinus, tangente, puissance réelle $(1+x)^{\alpha}$<br>Utiliser la formule de TAYLOR à l'ordre un ou deux ; interpréter graphiquement.<br>Connaître et utiliser les développements limités à l'ordre 1 des fonctions $(1+x)^{\alpha}$ , $\ln(1+x)$ ; $\exp(x)$ ; et à l'ordre 2 des fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$<br>Interpréter l'intégrale comme une somme de contributions infinitésimales, en lien avec la méthode des rectangles en mathématiques.<br>Exprimer la valeur moyenne sous forme d'une intégrale. Connaître la valeur moyenne sur une période des fonctions $\cos(x)$ ;$\sin(x)$ ; $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$<br>Déterminer un comportement asymptotique ; rechercher un extremum local.<br>Utiliser des échelles logarithmiques ; identifier une loi de puissance à une droite en échelle log-log. |

### Équations aux dérivées partielles :

| | |
|---|---|
| Exemples d'équations aux dérivées partielles : équation de Laplace, équation de diffusion, équation de d'ALEMBERT. | Identifier une équation aux dérivées partielles connue.<br>Transposer une solution familière dans un domaine de la physique à un autre domaine.<br>Obtenir des solutions de forme donnée par substitution.<br>Utiliser des conditions initiales et des conditions aux limites. |

### Calcul différentiel :

| | |
|---|---|
| Différentielle d'une fonction de plusieurs variables. Dérivée partielle. Théorème de SCHWARZ. | Savoir écrire l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles. Identifier la valeur d'une dérivée partielle, l'expression de la différentielle étant donnée. Utiliser le théorème de SCHWARZ (admis). |

### Géométrie dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ :

| | |
|---|---|
| Vecteurs et système de coordonnées.<br>Projection d'un vecteur et produit scalaire, interprétation géométrique.<br>Produit vectoriel, interprétation géométrique.<br>Produit mixte.<br>Notions de dérivée temporelle d'un vecteur dans un référentiel donné.<br>Transformations géométriques, symétries par rapport à un plan, translations et rotations de l'espace.<br>Courbes planes.<br>Courbes planes paramétrées.<br>Longueurs, aires et volumes classiques.<br>Barycentre d'un système de points. | Exprimer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Utiliser les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.<br>Interpréter géométriquement le produit scalaire et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée.<br>Utiliser la bilinéarité et le caractère symétrique du produit scalaire.<br>Interpréter géométriquement le produit vectoriel et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée directe.<br>Utiliser la bilinéarité et le caractère antisymétrique du produit vectoriel.<br>Faire le lien avec l'orientation des trièdres.<br>Utiliser les symétries par rapport à un plan, les translations et les rotations de l'espace.<br>Utiliser leur effet sur l'orientation de l'espace.<br>Reconnaître l'équation cartésienne d'une droite, d'un cercle. |

| | |
|---|---|
| | Utiliser la représentation polaire d'une courbe plane ; utiliser un grapheur pour obtenir son tracé.<br>Identifier une ellipse à l'aide de sa représentation paramétrique $x = a\cos(\omega t), y = b\cos(\omega t - \varphi)$ et la tracer dans les cas particuliers $\varphi = 0$ , $\varphi = \pi/2$ et $\varphi = \pi$<br>Citer les expressions du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'une sphère, du volume d'une boule, du volume d'un cylindre.<br>Énoncer la définition du barycentre.<br>Utiliser son associativité.<br>Exploiter les symétries pour prévoir la position du barycentre d'un système homogène. |
| **Trigonométrie :** | |
| Angle orienté, convention d'orientation des angles d'un plan (euclidien). Lecture des lignes trigonométriques dans un triangle rectangle, cas des petits angles.<br>Fonctions cosinus, sinus et tangente.<br>Nombres complexes et représentation dans le plan, partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument d'un nombre complexe. Somme et produit de nombres complexes.<br>Notation complexe, utilisée pour la résolution de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants dont le second membre est une fonction sinusoïdale du temps. | Définir une convention d'orientation des angles d'un plan (euclidien) et lire des angles orientés. Relier l'orientation d'un axe de rotation à l'orientation positive des angles d'un plan perpendiculaire à cet axe.<br>Utiliser le cercle trigonométrique et l'interprétation géométrique des fonctions cosinus, sinus et tangente comme aide-mémoire : relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ;relations entre fonctions trigonométriques et toutes relations du type $\cos(\pi \pm x)$ et $\cos(\pi/2 - \pm x)$ parités, périodicité, valeurs des fonctions pour les angles usuels. Citer les formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus ; utiliser un formulaire dans les autres cas.<br>Calculer et interpréter géométriquement la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument d'un nombre complexe. |
| **Analyse vectorielle :** | |
| Gradient d'un champ scalaire, lien entre le gradient et la différentielle.<br>Divergence.<br>Rotationnel.<br>Laplacien d'un champ scalaire.<br>Laplacien d'un champ de vecteurs.<br>Champs proportionnels à $\exp[i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})]$ ou $\exp[i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)]$ . | On fait le lien entre le gradient et la différentielle. Citer l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles.<br>Citer l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes ; utiliser un formulaire fourni en coordonnées cylindriques ou sphériques.<br>Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.<br>Énoncer et utiliser le théorème d'OSTROGRADSKI.<br>Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.<br>Énoncer et utiliser le théorème de STOKES.<br>Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.<br>Définir le laplacien à l'aide de la divergence et du gradient.<br>Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.<br>Exprimer le laplacien d'un champ de vecteurs en |

| | |
|---|---|
| | coordonnées cartésiennes.<br>Utiliser la formule d'analyse vectorielle :<br>$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \Delta\vec{A}$<br>Exprimer l'action des opérateurs d'analyse vectorielle sur un tel champ à l'aide du vecteur $i\vec{k}$. |
| **Analyse de Fourier** | |
| Synthèse spectrale d'une fonction périodique. Synthèse spectrale d'une fonction non périodique. | Utiliser un développement en série de Fourier fourni.<br>Utiliser un raisonnement par superposition.<br>Citer et utiliser la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale $\Delta f$ et la durée caractéristique $\Delta t$ d'un signal non périodique. |

## 3 Outils numériques pour la physique

*La prise en compte de l'enseignement de l'informatique en sciences physiques est un défi important pour notre système éducatif. L'introduction d'activités numériques dans le programme des classes préparatoires prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation. Elles offrent aux élèves la possibilité d'effectuer une modélisation avancée du monde réel, par exemples par la prise en compte d'effets non linéaires ou le test d'une loi.*

*En sciences physiques, l'utilisation des outils numériques de codage en langage Python est centrée sur la découverte de cet outil de programmation et l'exploitation de fonctions extraites de ses diverses bibliothèques. Python - muni de ses nombreuses bibliothèques - est devenu le langage de référence dans les classes préparatoires scientifiques. Il peut être utilisé comme : simple calculatrice, outil de résolution, visualisation graphique (avec Matplotlib), simulation numérique (NumPy/SciPy), calcul formel (SymPy), réalisation d'interface graphique (TKinter...), production de sites...*

*Les activités numériques de codage fixées dans ce programme permettent aux élèves de développer des connaissances et des savoir-faire utiles à la physique comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.*

*Le tableau ci-dessous explicite les outils relatifs aux activités numériques ainsi que les savoir-faire exigibles en fin de première année. Il sera complété dans le programme de physique de seconde année.*

| **Programme** | **Savoir-faire numériques exigibles** |
|---|---|
| **Outils numériques :** | |
| Représentation graphique d'un nuage de points. | Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque Matplotib pour représenter un nuage de points. |
| Représentation graphique d'une fonction. | Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque Matplotib pour tracer la courbe représentative d'une fonction. |
| Courbes planes paramétrées. | Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque Matplotib pour tracer une courbe plane paramétrée. |
| **Équations algébriques :** | |
| Résolution d'une équation algébrique ou d'une équation transcendante : méthode dichotomique. | Déterminer, en s'appuyant sur une représentation graphique, un intervalle adapté à la recherche nu- |

| | |
|---|---|
| | mérique d'une racine par une méthode dichotomique.<br>Mettre en oeuvre une méthode dichotomique afin de résoudre une équation avec une précision donnée. Utiliser la fonction `bisect` de la bibliothèque `scipy.optimize` (sa spécification étant fournie). |

**Intégration - Dérivation :**

| | |
|---|---|
| Calcul approché d'une intégrale sur un segment par la méthode des rectangles. | Mettre en oeuvre la méthode des rectangles pour calculer une valeur approchée d'une intégrale sur un segment. |
| Calcul approché du nombre dérivé d'une fonction en un point. | Utiliser un schéma numérique pour déterminer une valeur approchée du nombre dérivé d'une fonction en un point. |

**Équations différentielles :**

| | |
|---|---|
| Équations différentielles d'ordre 1. | Mettre en oeuvre la méthode d'Euler explicite afin de résoudre une équation différentielle d'ordre 1. |
| Équations différentielles d'ordre supérieur ou égal à 2. | Transformer une équation différentielle d'ordre n en un système différentiel de n équations d'ordre 1.<br>Utiliser la fonction `odeint` de la bibliothèque `scipy.integrate` (sa spécification étant fournie). |

**Probabilités – statistiques :**

| | |
|---|---|
| Variable aléatoire. | Utiliser les fonctions de base des bibliothèquesrandom et/ou numpy (leurs spécifications étant fournies) pour réaliser des tirages d'une variable aléatoire.<br>Utiliser la fonction `hist` de la bibliothèque `matplotlib.pyplot` (sa spécification étant fournie) pour représenter les résultats d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire. Déterminer la moyenne et l'écart-type d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire. |
| Régression linéaire. | Utiliser la fonction `polyfit` de la bibliothèque numpy (sa spécification étant fournie) pour exploiter des données. Utiliser la fonction `random.normal` de la bibliothèque numpy (sa spécification étant fournie) pour simuler un processus aléatoire. |

**Transformée de Fourier discrète :**

| | |
|---|---|
| | Calculer la transformée de Fourier discrète d'un signal à valeurs réelles en utilisant la fonction `rfft` de la bibliothèque `numpy.fft` (sa spécification étant donnée). |

**Équation de diffusion à une dimension :**

| | |
|---|---|
| | Mettre en oeuvre une méthode des différences finies explicite pour résoudre l'équation de diffusion à une dimension en régime variable. |

PROGRAMME DE LA MATIÈRE

# Chimie



## 1 Préambule

### 1.1 Objectifs de formation en chimie

La révision du programme de chimie de la classe de 2ème année PSI fait suite à celle de la classe de première année. Elle vise à mettre l'accent sur les particularités des méthodes et démarches de cette science, en insistant particulièrement sur les pratiques expérimentales et l'activité de modélisation. Le programme réserve une place importante aux concepts dans une perspective concrète et contextualisée. Le but est de donner aux élèves, futurs ingénieurs, chercheurs ou enseignants, une vision attrayante de la chimie, avec une bonne compréhension des phénomènes étudiés. Ce programme de chimie ambitionne de faire percevoir aux élèves la portée unificatrice et universelle des lois et concepts de la chimie. Il aspire aussi à leur faire sentir les spécificités de la démarche de modélisation visant à établir un lien entre le « monde des faits » et le « monde des modèles ». Cependant, la mise en équation et la résolution mathématique des situations ne doivent pas prendre le dessus sur la compréhension des phénomènes chimiques. Un autre point fort de la chimie, qu'il est bon de souligner, est sa connexion intime avec les autres disciplines scientifiques comme par exemples la physique et la biologie. Il convient que les problématiques abordées, les illustrations et les applications prennent largement appui sur des transformations chimiques rencontrées dans la vie courante, au laboratoire, en milieu industriel ou dans le monde du vivant.

Ce programme attache une grande importance à l'instauration d'une continuité suffisante entre le programme de chimie des classes préparatoires et ceux des classes antérieures. D'un autre côté le programme est bâti de sorte que les connaissances et les savoir-faire des élèves soient compatibles avec la suite de leur formation dans le système des écoles d'ingénieurs ou le cas échéant dans l'enseignement universitaire. D'ailleurs un soin particulier a été accordé aux passerelles entre l'enseignement universitaire et le système des classes préparatoires.

L'accent sera mis sur la démarche scientifique, fondée sur des savoirs théoriques et des savoir-faire pratiques. L'approche expérimentale est censée développer chez l'élève des qualités inhérentes à toute science expérimentale, comme l'observation, la rigueur, la créativité, l'esprit d'initiative, et le sens critique. Dans ce sens, l'enseignement de la chimie est renforcé par une réhabilitation de la formation expérimentale des élèves à travers les travaux pratiques (TP) et les expériences de cours. Cette mesure vise à renforcer le côté expérimental chez l'élève et à le familiariser, le plus possible, avec les méthodes et le matériel utilisés en chimie.

L'enseignement de la chimie est enrichi par l'introduction d'activités numériques qui permettront d'aborder de nombreux champs de la discipline. Cette introduction prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation. Dans cet esprit, la prise en compte de capacités de codage en langage Python dans la formation des élèves de 2ème année PSI inclue l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques. Elle vise à une meilleure appréhension des principes mis en oeuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée. Elle a aussi pour objectif de mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la chimie. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la chimie comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples. Ces activités offrent aux élèves la possibilité :

- d'effectuer une modélisation avancée du monde réel, permettant de décrire plus finement le monde réel ;
- de réaliser un programme complet structuré allant de la prise en compte de données expérimentales à la mise en forme des résultats permettant de résoudre un problème scientifique donné ;
- d'étudier l'effet d'une variation des paramètres sur le temps de calcul, sur la précision des résultats, sur la forme des solutions pour des programmes d'ingénierie numérique choisis ;
- d'utiliser les fonctions de l'environnement logiciel pour résoudre un problème scientifique mis en équation lors des enseignements de chimie ;
- d'utiliser les fonctions de l'environnement logiciel pour afficher les résultats sous forme graphique ;
- de tenir compte des aspects pratiques comme l'impact des erreurs d'arrondi sur les résultats, le temps de calcul ou le stockage en mémoire.

Pour certains thèmes, les *activités numériques* à développer sont explicitement signalées en *caractères gras italiques* dans la colonne des commentaires du tableau des contenus thématiques. Deux *activités numériques* sont associées au thème «*Mesures et incertitudes* ». Elles définissent des savoir-faire numériques exigibles. Une simulation informatique en langage Python est requise. Dans ce cas, le professeur mettra à la disposition de ces élèves, un exemple de programme informatique écrit dans ce langage de programmation familier à l'élève en cours d'informatique. Les outils numériques développés pourront être largement appliqués lors des différentes activités d'enseignement et particulièrement lors des évaluations écrites et orales réalisées en classe.

Avec un code préalablement écrit, le professeur et l'élève pourront mettre en oeuvre les outils numériques :

- avant une activité pour la préparer : estimer une incertitude, ajuster des valeurs expérimentales, comparer des prévisions théoriques et des observations expérimentales, prolonger informatiquement l'expérience, préparer un exercice, réaliser une illustration (calcul, courbe, animation,...) ;
- pendant l'activité : faire un exercice, présenter une illustration... ;
- après l'activité : rédiger un compte-rendu.

En plus des activités exigibles, on pourra utiliser l'outil informatique à chaque fois que celui-ci est susceptible d'apporter un gain de temps ou une meilleure illustration des enseignements. C'est ainsi qu'on pourra faire appel, selon les circonstances, à des logiciels de calcul formel et de représentation graphique, ou à des banques de données.

L'esprit de la démarche scientifique adoptée dans l'exécution du programme de chimie, empreinte de rigueur et de sens critique permanent, doit permettre à l'élève, sur toute question du programme :

- de communiquer l'essentiel des résultats sous forme claire et concise, tant à l'oral qu'à l'écrit ;
- d'en analyser le caractère de pertinence : modèle utilisé, limites du modèle, influence des paramètres, homogénéité des formules, symétries, interprétation des cas limites, ordres de grandeur et précision ;
- d'en rechercher l'impact pratique ;
- de devenir graduellement acteur de sa formation, qu'il comprenne mieux l'impact de la science et que, plus assuré dans ses connaissances, il soit préparé à poursuivre son cursus d'études dans les grandes écoles.

## 1.2 Repères pour l'enseignant

Lors de la mise en application du programme et dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant organise son enseignement en respectant les principes directeurs suivants :

- privilégier la mise en activité des élèves en évitant tout dogmatisme ;
- adopter une progressivité dans la difficulté des exercices de travaux dirigés permettant ainsi aux élèves l'assimilation, l'entraînement et l'approfondissement ;
- permettre et encadrer l'expression par les élèves de leurs conceptions initiales ; ;
- valoriser l'approche expérimentale ;
- contextualiser les apprentissages pour leur donner du sens ;
- procéder régulièrement à des synthèses pour expliciter et structurer les savoirs et savoir-faire et les appliquer dans des contextes différents ;
- tisser des liens aussi bien entre les notions du programme qu'avec les autres enseignements, notamment les mathématiques et l'informatique, commun à tous les élèves de la filière PSI ;
- favoriser l'acquisition d'automatismes et développer l'autonomie et l'initiative des élèves en proposant des temps de travail personnel ou en groupe.

## 1.3 Communication à l'écrit et à l'oral

La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet à l'élève de développer les savoirs et les savoir-faire d'expression écrite. La qualité de la rédaction et de la présentation, ainsi que la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses élèves, entre les élèves eux-mêmes, doit également contribuer à développer des savoirs et les savoir-faire de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux élèves en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux pratiques ou de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer *la communication à l'écrit et à l'oral.* La communication utilise des moyens diversifiés : les élèves doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

## 1.4 Évaluation des élèves

L'évaluation des apprentissages en classes préparatoires se définit comme une démarche de collecte d'informations conduisant à un jugement sur la valeur du travail et du résultat d'un élève, par rapport aux objectifs d'une activité d'enseignement, en vue de prendre une décision quant au cheminement ultérieur de l'apprenant. C'est un acte pédagogique ; formatif et sommatif. Elle vise à mesurer le degré de maîtrise des savoirs et savoir-faire tels que définis par le programme et le niveau d'autonomie et d'initiative des élèves. L'élaboration d'une situation d'évaluation prévoit une progression dans les difficultés suffisamment large pour apprécier les différents niveaux des élèves. L'évaluation doit être établie en relation avec les objectifs de formation et les performances attendues des élèves.

Rappelons que la voie PSI s'adresse aux élèves intéressés par une approche théorique des questions scientifique. Cette voie est conçue de manière à développer conjointement l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur, sans oublier l'approche des sciences fondamentales basées sur l'expérimentation et la modélisation. Il va de soi que les spécificités de cette voie doivent se retrouver dans le contenu des deux approches, théorique et expérimentale, ainsi que dans l'évaluation et le contrôle des connaissances. Les pratiques d'évaluation doivent respecter l'esprit des objectifs :

tester l'aptitude de l'élève moins à résoudre les équations qu'à les poser, puis à analyser les résultats, tant dans leur caractère théorique que pratique.

## 1.5 Organisation des programmes

Le programme de chimie est organisé en deux parties « *Formation expérimentale* » et « *Contenus thématiques* ».

Dans la première partie, sont décrits l'organisation de la formation expérimentale et les objectifs de cette formation que les élèves doivent développer et acquérir à la fin de l'année scolaire. La mise en oeuvre de la formation expérimentale doit s'appuyer sur des problématiques concrètes et clairement identifiées. Elles doivent être programmées par l'enseignant de façon à assurer un apprentissage progressif de l'ensemble des connaissances et des savoir-faire attendus.

La seconde partie, intitulée « *Contenus thématiques* », est structurée autour de quatre thèmes. Elle met en valeur les éléments clefs constituant l'ensemble des savoirs et des savoir-faire dont l'assimilation par les élèves est requise. Il est recommandé d'aborder les items de cette partie qui se prêtent à l'exercice, par une approche expérimentale démonstrative ou par une simulation numérique. L'expérience de cours démonstrative menée par l'enseignant pendant le cours éveillerait la curiosité des élèves et susciterait un questionnement actif et collectif, ce qui permettrait de faire évoluer la réflexion théorique et la modélisation. Le choix des thèmes des expériences de cours relève de l'initiative pédagogique et de la responsabilité du professeur.

Pour faciliter la progressivité des acquisitions, pour tenir compte des contraintes liées à la formation expérimentale et afin d'avoir une vision globale à l'échelle nationale, il est impératif de suivre la progression des quatre thèmes de cette partie dans l'ordre suivant :

**I** **Thermodynamique des systèmes chimiques ;**

**II** **Aspects thermodynamique et cinétique de l'électrochimie.**

L'ordre d'exposition, dans chaque thème, relève bien sûr de la liberté pédagogique du professeur, cependant, il devra faciliter la progressivité des acquisitions.

Trois annexes sont consacrées :

- au matériel de chimie nécessaire à la mise en oeuvre des programmes ;
- aux outils mathématiques et numériques que les élèves doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de chimie à la fin de l'année de la classe de PSI.

# Formation expérimentale

La chimie, à l'instar de toutes les sciences, est un entrelacement subtil de modèles théoriques et de validations expérimentales. Les travaux dirigés permettent aux élèves de s'entraîner et de mieux s'approprier les concepts et techniques enseignés. Les travaux pratiques leur apportent quant à eux une compréhension plus concrète des phénomènes naturels et technologiques étudiés et développent leurs savoir et savoir-faire expérimentaux. Ils permettent ainsi de tisser un lien étroit entre le réel et sa représentation et constituent pour les élèves un moyen d'appropriation de techniques, de méthodes, mais aussi des notions et des concepts.

D'un autre côté l'activité expérimentale part d'un questionnement inscrit dans un cadre de réflexion théorique et conduit l'élève à analyser la tâche qui lui est demandée, à s'approprier la problématique attachée, à envisager un protocole comportant des expériences, puis à le réaliser. L'élève est alors invité à porter un jugement critique sur la pertinence des résultats obtenus, ce qui permet de conclure quant à la validité des hypothèses formulées. Une séance de travaux pratiques doit comporter non seulement la manipulation proprement dite, mais aussi des temps de réflexion, de construction intellectuelle et d'échanges avec le professeur. C'est pourquoi ce dernier choisit les sujets d'étude plus en raison de leurs qualités formatrices que des phénomènes particuliers qui en constituent le support.



## 1 Objectifs de la formation expérimentale

Le programme de chimie introduit les activités expérimentales avec deux principaux objectifs : un objectif d'éducation scientifique et d'apprentissage des principaux concepts qui permettent de comprendre le monde moderne en tant que citoyen éclairé et un objectif de préparation à l'évaluation des savoir et savoir-faire expérimentaux acquis et par la suite au monde professionnel.

À ce propos, le programme de chimie souligne l'importance :

- de la pratique expérimentale (travaux pratiques et expériences de cours) comme caractéristique des sciences physiques ;
- de l'acquisition des connaissances scientifiques et techniques de base (ordres de grandeur, schémas d'explication qualitative, modélisation, information sur le monde technique et les connaissances fondamentales en chimie y comprises les plus récentes) ;
- de l'entraînement à la manipulation, à l'observation, à la réalisation et à la représentation d'objets et de phénomènes ;
- de l'entraînement aux modes de raisonnement des sciences physiques, en essayant de présenter aux élèves l'interaction dialectique entre théorie et expériences.

Effectués en binôme ou trinôme, les TP apprennent aux élèves :

- à se familiariser avec le matériel et à s'adapter à ses contraintes ;
- à réaliser des mesures et des acquisitions, à les commenter, les interpréter et les confronter à un modèle théorique ;
- à concevoir progressivement leurs propres protocoles expérimentaux afin de mettre en oeuvre une démarche leur permettant de réaliser les TP ; puis, plus tard, *s'approprier les concepts de la démarche scientifique durables et indispensables* à tous les futurs ingénieurs, chercheurs ou enseignants.

La formation expérimentale des élèves est réalisée à travers deux composantes : les expériences de cours et les travaux pratiques. Ces deux composantes, complémentaires, ne répondent pas tout à fait aux mêmes objectifs :

- les expériences de cours démonstratives menées par l'enseignant pendant le cours suscitent un questionnement actif et collectif autour d'une expérience bien choisie permettant de faire évoluer la réflexion théorique et la modélisation, d'aboutir à des lois simplificatrices et unificatrices, de dégager des concepts transversaux entre différents domaines de la chimie, de montrer aux élèves que «la théorie et l'expérience sont indissociablement liées» et enfin de mieux se situer par rapport aux objectifs de la leçon. Le choix des thèmes des expériences de cours relève de l'initiative pédagogique et de la responsabilité du professeur ;
- les travaux pratiques permettent, dans une approche contextualisée, suscitée par une problématique clairement identifiée et, chaque fois que cela est possible, transversale, l'acquisition de savoir et savoir et savoir-faire techniques, de savoir dans le domaine de la mesure et de l'évaluation de sa précision, d'autonomie dans la mise en oeuvre de protocoles simples associés à la mesure des grandeurs physiques ou chimiques les plus souvent mesurées ;

  Afin d'améliorer la pratique expérimentale et rendre les apprentissages plus efficaces, il convient :
- de questionner les élèves avant, pendant et après le TP sur ce qu'ils sont en train de faire et surtout sur le pourquoi ;
- de faire utiliser le matériel sophistiqué (carte d'acquisition, pH-mètre-millivoltmètre, spectrophotomètre à fibre optique $\cdots$) de façon consciente. La mesure effectuée avec l'ordinateur, par exemple, ne doit pas se réduire à un presse-bouton. Les enjeux doivent être clairs pour les élèves ;
- d'être attentif aux exigences des élèves et à l'attendu des différentes évaluations. Ces exigences doivent être motivées et pas seulement être dérivées du fait qu'ils veulent minimiser l'effort à fournir ;
- de varier le plus possible la typologie des TP. Par exemple, en alternant le fait de faire la théorie avant le TP ou les laisser découvrir la théorie, en alternant entre un texte protocolaire et un bref texte les invitant à développer la mise en oeuvre expérimentale après une recherche documentaire.

Il est important de préciser par écrit, en préambule de l'énoncé de chaque TP, les objectifs et les savoir-faire visés et de ne pas manquer à en évaluer rapidement le degré de réalisation et de maîtrise à la fin de chaque étape ou la fin de la séance.

## 2 Organisation de la formation expérimentale

Cette partie précise les connaissances et les « savoir-faire » associés à la formation expérimentale des élèves et que ces derniers doivent acquérir dans le domaine de la mesure expérimentale et de l'évaluation des incertitudes des meures. Elle aborde la question de la prévention du risque au laboratoire de physique-chimie. Elle précise aussi la liste des thèmes de travaux pratiques et fixent les objectifs de chaque thème. Elle souligne aussi l'importance de l'évaluation régulière des acquis des élèves inscrits dans le volet de la formation expérimentale.

Une liste de matériel, que les élèves doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice succincte, figure dans l'annexe « *1. Liste de matériel* » du présent programme. Son placement en annexe du programme, et non à l'intérieur de la partie dédiée à la formation expérimentale, est délibéré : il exclut l'organisation de séances de travaux pratiques dédiées à un appareil donné et centrées seulement sur l'acquisition des compétences techniques associées.

## 2.1 Mesures et incertitudes

*La notion d'incertitude est indispensable dans la démarche expérimentale. En effet, elle est nécessaire pour juger de la qualité d'une mesure ou de sa pertinence. Sans elle on ne peut examiner la compatibilité d'une mesure avec une loi donnée. Ce thème intitulé « Mesures et incertitudes» vise à fournir les outils nécessaires à l'analyse de résultats expérimentaux.*

*Les élèves doivent avoir conscience de la variabilité des résultats obtenus lors d'un processus de mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type, en connaître les origines et les sources, estimer leur influence sur le résultat final, et comprendre et s'approprier ainsi les objectifs visés par l'évaluation des incertitudes. Ils détermineront ensuite ce qu'il faudrait faire pour améliorer la précision d'un résultat.*

*En fin, il est essentiel que les notions sur les mesures et incertitudes diffusent dans chacun des thèmes du programme, théoriques et expérimentaux, tout au long des deux années préparatoires et qu'elles soient régulièrement évaluées.*

*Le tableau ci-dessous explicite les savoir-faire exigibles sur le thème «mesures et incertitudes». Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.*

| **Contenu** | **Savoir-faire exigibles** |
|---|---|
| Variabilité de la mesure d'une grandeur physique.<br>Notion d'incertitude. Incertitude-type.<br>Erreur ; composante aléatoire et composante systématique de l'erreur.<br>Incertitude-type A. Incertitude-type B. Propagation des incertitudes. Écart normalisé.<br>Évaluation d'une incertitude-type. | Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure.<br>Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A).<br>Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B).<br>Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale. |
| Incertitude-type composée.<br>Incertitude élargie. | Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient.<br>Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée.<br>*Activité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.* |
| Écriture du résultat d'une mesure.<br>Chiffres significatifs. | Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure. |
| Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé. | Comparer deux valeurs dont les incertitudes- types sont connues à l'aide de leur écart normalisé.<br>Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation. |
| Régression linéaire. | Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'ob- |

| | |
|---|---|
| | tenir les valeurs des paramètres du modèle.<br>Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés.<br>*Activité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation* Monte-Carlo *– pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle* |

## 2.2 Prévention du risque au laboratoire de physique et de chimie

*L'apprentissage et le respect des règles de sécurité dans les laboratoires et les salles de travaux pratiques visent d'une part à réduire les risques liés aux activités expérimentales et d'autre part à sensibiliser les élèves au respect de la législation ainsi qu'à l'impact de leur activité sur l'environnement. L'élève doit adopter une approche méthodique, prudente et soignée et se concentrer sur ce qu'il est en train de faire.*

*La prévention des différents risques repose, d'une part, sur la mise en sécurité des installations électriques, mécaniques, thermodynamiques, … et des matériels exploités et, d'autre part, sur le respect des règles de sécurité lors de leur utilisation ou lors d'opération sur ou à proximité des différentes installations.*

*Dans le laboratoire de chimie on insistera sur le respect des règles générales de sécurité. Chaque fois qu'un produit chimique est utilisé, son pictogramme est précisé et sa signification est clairement indiquée, ainsi que les phrases* ***H*** *(****H*** *de Hazard/danger) et les phrases* ***P****(prévention). Les phrases* ***H*** *remplacent les anciennes phrases* ***R*** *et décrivent les risques d'une substance. Les phrases* ***P*** *(prévention) remplacent les anciennes phrases* ***S*** *et spécifient les mesures de sécurité qui doivent être suivies lors de la manipulation de ces substances. Des savoirs et des « savoir-faire » sont attachés au thème «* Prévention du risque au laboratoire de physique et de chimie»*. Ils sont détaillés dans le tableau ci-dessous.*

| Notations et contenu | Savoir-faire exigibles |
|---|---|
| **Prévention des risques au laboratoire** | |
| **Prévention des risques au laboratoire** | |
| | Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire.<br>Développer une attitude autonome dans la prévention des risques. |
| **Risque chimique**<br>Règles de sécurité au laboratoire. Classes et catégories de danger. Pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques. Mentions de danger (H) et conseils de prudence (P). Fiches de sécurité. | Relever les indications sur le risque associé au prélèvement, au mélange et au stockage des produits chimiques et adopter une attitude responsable lors de leur utilisation. |
| Risque électrique<br>Le risque électrique comprend le risque de contact, direct ou non, avec une pièce nue sous tension, le risque de court-circuit, et le risque d'arc électrique. Ses conséquences sont l'électrisation, l'électrocu- | Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation d'appareils électriques. |

tion, l'incendie, l'explosion…

### Risque optique et électromagnétique

Les rayonnements optiques auxquels peuvent être exposés les élèves sont parfois nocifs pour les yeux et pour la peau. Une démarche de prévention adaptée permet de réduire les risques pour la santé et la sécurité.

Utiliser les sources laser et les diodes électroluminescentes de manière adaptée.
Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation des émetteurs d'ondes hyperfréquences.

### Risque thermique

L'exposition à une ambiance thermique chaude ou la manipulation de corps chauds ou froids peut être à l'origine de brûlures ou de gelures localisées potentiellement graves.

Adopter une attitude responsable lors de manipulations de corps chauds ou froids.

### Risque mécanique

Les risques mécaniques englobent la coupure, la lacération ou la piqûre, l'écrasement, le contact avec des machines.

Adopter une attitude responsable lors de manipulations de dispositifs engageant des hautes ou des basses pressions ou lors de la conjonction d'un élément d'un montage et l'énergie d'un mouvement.

### Risque sonore

Le bruit au travail constitue une nuisance majeure et peut provoquer des surdités mais aussi stress et fatigue qui, à la longue, ont des conséquences sur la santé et la qualité du travail.

Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation des émetteurs d'onde infrasonores, sonores ou ultrasonores.

### **Prévention de l'impact environnemental**

Traitement et rejet des espèces chimiques.

Adapter le mode d'élimination d'une espèce chimique ou d'un mélange en fonction des informations recueillies sur la toxicité ou les risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.

## 2.3 Thèmes de travaux pratiques et objectifs

La liste suivante est une proposition non exhaustive de thèmes des TP. *Le choix des sujets, des manipulations à réaliser et de la progression des TP (comme celui des expériences de cours) relève de l'initiative pédagogique et de la responsabilité du professeur* : les thèmes proposés par le programme sont purement indicatifs, ceux-ci peuvent être remplacés par tout thème à l'initiative du professeur et ne faisant appel qu'aux connaissances du programme de la classe. Cependant, leur contenu doit répondre aux objectifs fixés par le programme. Les connaissances et les savoir-faire expérimentaux développés à travers les objectifs des différents thèmes de travaux pratiques sont exigibles aux épreuves d'évaluation, écrites et expérimentales, en classe et éventuellement aux concours. Ils peuvent faire l'objet de questions aux épreuves écrites et orales.

Rappelons qu'à travers les thèmes des travaux pratiques, il faudra procéder à l'évaluation des incertitudes types A et types B, à l'étude de leur propagation à l'aide d'un langage de programmation et à la présentation de la valeur numérique d'un résultat expérimental.

# 3 Solutions aqueuses

## TP1 Dosage du dioxygène par la méthode de Winkler.

### TP2 Cinétique électrochimique. Tracé et étude de courbes courant-potentiel. Réalisation d'une pile électrochimique. Protection contre la corrosion.

### TP3 Diagramme potentiel-pH du fer

- sélectionner et utiliser le matériel adapté à la précision requise ;
- utiliser les appareils de mesure (balance, pH-mètre, conductimètre, millivoltmètre, spectrophotomètre) en s'aidant d'une notice ;
- Étalonner une chaîne de mesure si nécessaire ;
- distinguer les instruments de verrerie In et Ex ;
- préparer une solution de concentration en masse ou en quantité de matière donnée à partir d'un solide, d'un liquide, d'une solution de composition connue avec le matériel approprié ;
- présenter la valeur numérique d'un résultat expérimental ; chiffres significatifs, erreurs et incertitudes ;
- mettre en oeuvre les dosages, direct et indirect ;
- déterminer une constante d'équilibre ;
- illustrer un procédé de retraitement, de recyclage, de séparation en solution aqueuse ;
- mettre en oeuvre une réaction d'oxydo-réduction pour réaliser une analyse quantitative en solution aqueuse ;
- réaliser une pile et étudier son fonctionnement ;
- mettre en oeuvre des réactions d'oxydoréduction en s'appuyant sur l'utilisation de diagrammes potentiel-pH ;
- mettre en oeuvre un dispositif à trois électrodes pour tracer des courbes courant-potentiel ;
- mettre en oeuvre des piles et des électrolyseurs ;
- prévenir les risques chimiques, électriques et optiques ;
- connaître les règles de sécurité au laboratoire, pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques, phrases H et P ;
- maîtriser l'impact environnemental : traitement et rejet des espèces chimiques.

## 4 Thermodynamique chimique

### TP4 Détermination expérimentale d'une enthalpie de réaction.

- mesurer une enthalpie de réaction par calorimétrie ;
- valider expérimentalement la modélisation d'une transformation thermodynamique ;
- analyser qualitativement des expériences de déplacement d'équilibre ;
- déterminer l'évolution de la valeur d'une constante thermodynamique d'équilibre en fonction de la température.

## 4.5 Compte-rendu

La séance de travaux pratiques donne lieu à une synthèse écrite comportant, sous forme succincte, l'indication et l'exploitation des résultats. À cet égard on attache de l'importance à leur présentation graphique. L'utilisation d'un ordinateur, soit pour l'acquisition et le traitement de données expérimentales, soit pour comparer les résultats des mesures aux données théoriques, évite des calculs longs et répétitifs et favorise le tracé de courbes. Si les élèves sont appelés à utiliser d'autres appareils, toutes les indications nécessaires doivent leur être fournies.

Il est impératif d'exiger de l'élève la rédaction d'un compte-rendu pendant une séance de travaux pratiques. Cette aptitude constitue un des objectifs de la formation scientifique. Les activités expérimentales sont aussi l'occasion de travailler l'expression orale lors d'un point de situation ou d'une synthèse finale par exemple. Le but est de bien préparer les élèves de CPGE à la présentation des travaux et projets qu'ils auront à conduire et à exposer aux épreuves orales et au cours de leur formation en école d'ingénieur et, plus généralement, dans le cadre de leur métier de chercheur ou d'ingénieur.

L'élève doit rédiger dans son cahier, au fur et à mesure, un compte-rendu :

- définissant les objectifs du thème de travaux pratiques ;
- précisant la problématique préalablement définie ;
- expliquant les choix expérimentaux effectués et les techniques de mesure utilisées ;
- comprenant les mesures effectuées, et les courbes tracées et visualisées, les photos des écrans d'appareil de mesure ou de visualisation et précisant bien les choix des paramètres de mesure (amplitudes, fréquences, calibres, etc.) ;
- interprétant les différentes courbes et mesures en relation avec les résultats théoriques fournis.

Si l'intérêt du compte-rendu est évident, en revanche il faut veiller à ce qu'il ne prenne pas une importance considérable, en temps, par rapport au travail expérimental proprement dit.

D'autre part, les différentes activités pratiques doivent être couronnées par l'*évaluation hebdomadaire et trimestrielle* des savoir et savoir-faire expérimentaux, Lors de cette évaluation, il faudrait bien expliciter les distinctions entre savoirs et savoir-faire, et entre savoir-utiliser et savoir mettre en oeuvre.



# Contenus thématiques

Chaque thème du programme comporte une introduction spécifique indiquant les objectifs de formation et les domaines d'application. Elle est complétée par un tableau en deux colonnes qui identifient, d'une part, les notions et contenus à connaître, et donc exigible, d'autre part, des commentaires ainsi que les activités numériques et expérimentales supports de la formation. Les activités numériques sont identifiées en *caractères italiques* ; le langage de programmation conseillé est le langage Python. Les thèmes des *activités numériques* sont choisis de manière à représenter la diversité des applications possibles. Le professeur veillera à ce qu'une concertation régulière avec l'enseignant d'informatique soit développée autour de l'exécution de ces activités.

Le programme de chimie a été rédigé et abondamment commenté, avec le souci majeur de faciliter la transition entre l'enseignement secondaire le système des classes préparatoires. Pour atteindre ce but, il a été jugé indispensable :

- de valoriser l'approche expérimentale des phénomènes pour stimuler chez l'élève une attitude active et créatrice, favorisant l'appropriation des connaissances et le développement d'un certain savoir-faire manuel. Les travaux pratiques (TP) et les expériences de cours sont les temps forts de cette valorisation ;

- de valoriser l'approche numérique afin de permettre aux élèves de mettent en oeuvre leurs connaissances en informatique dans le cadre de l'étude d'une application en chimie ;
- de coordonner entre les enseignements de mathématiques, sciences industrielles, informatique, physique et chimie utilisant des outils souvent communs, pour faciliter le travail d'assimilation des élèves. Ceci rejette tout cloisonnement des enseignements scientifiques et suppose au contraire une concertation étroite au sein de l'équipe pédagogique.

Les intitulés de chapitres sont très classiques de façon que les acquis des élèves soient clairement identifiés.

## Table des matières avec horaires indicatifs





# 1 Thermodynamique des systèmes chimiques

Cette partie est développée en relation avec le programme de thermodynamique physique vu en PCSI. L'étude des transferts thermiques, abordée en première année dans le cadre du cours de physique relatif aux transformations physiques du corps pur, est ici généralisée aux transformations physico-chimiques. Les enthalpies standard de réaction sont considérées comme indépendantes de la température.

Les objectifs généraux de cette partie sont :

- choisir de manière rigoureuse et décrire le système physico-chimique étudié ;
- illustrer sur les systèmes engagés dans une transformation chimique la notion de bilan enthalpique pour accéder aux effets thermiques en réacteur isobare ;
- apprendre à calculer les grandeurs standard de réaction pour une température quelconque ;
- établir et exploiter le critère d'évolution spontané d'un système engagé dans une transformation physico-chimique ;
- identifier les paramètres d'influence et leur sens d'évolution pour optimiser une synthèse ou minimiser la formation d'un produit secondaire indésirable ;
- décrire quantitativement l'évolution d'un système prenant en compte les conditions expérimentales choisies pour réaliser la transformation

## 1.1 Grandeurs de réaction

*Dans cette partie, l'étude des transferts thermiques, abordée en première année dans le cadre du cours de physique relatif aux transformations physiques du corps pur, est ici généralisée aux transformations physico-chimiques. Pour le calcul des grandeurs standard de réaction, les enthalpies et entropies standard de réaction sont supposées indépendantes de la température.*

*Les notions et contenus sont illustrés à travers des applications liées à la vie quotidienne (contenu calorique des aliments, pouvoirs calorifiques des carburants, etc.), à la recherche (apports des techniques calorimétriques modernes, etc.) ou au domaine industriel.*

Écriture conventionnelle de l'équation bilan d'une réaction chimique.

Les coefficients stoechiométriques sont considérés algébriques.

### Grandeurs de réaction, enthalpie de réaction, entropie de réaction

Grandeurs standard de réaction :

- état standard et grandeurs molaires standard d'un constituant ;
- états standard de référence d'un élément chimique.

On calcule les grandeurs de réaction à partir des tables de données thermodynamiques.

Grandeurs standard de formation d'un corps :

- loi de HESS, expression de $\Delta_r H^o$ en fonction des enthalpies standard de formation $\Delta_f H^o$ des constituants à une température donnée.
- grandeurs standard $\Delta_r H^o$, $\Delta_r S^o$ et $\Delta_r C_p^o$ de réaction chimique ;
- signe de $\Delta_r H^o$ : définition d'une réaction endothermique ou exothermique ;
- signe de $\Delta_r S^o$ et production du désordre par la réaction.

Approximation d'ELLINGHAM
Discontinuité de $\Delta_r H^o$, $\Delta_r S^o$ et $\Delta_r C_p^o$ lors d'un changement d'état d'un constituant.
Utilisation des tables thermodynamiques pour les calculs des grandeurs de réaction à 298 K.

On signale que $\Delta_r H^o$, $\Delta_r S^o$ et $\Delta_r C_p^o$ dépendent de la température et on se placera dans toute la suite dans le cadre de l'approximation d'ELLINGHAM.
Les relations de KIRCHHOFF sont hors programme.

Modèles de transformation isobare, isotherme ou adiabatique.
Chaleur reçue lors d'une évolution isobare.
Effets thermiques pour une transformation monobare :

- transfert thermique associé à une transformation physico-chimique monobare et monotherme ;
- variation de température associée à une transformation physico-chimique monobare et adiabatique.

Ces modèles de transformations sont simplement cités pour mieux expliciter le lien avec le cours de physique.
Le programme se limite à l'étude des transformations isobares et privilégie l'enthalpie par rapport à l'énergie interne.
On traite sur un exemple une transformation chimique supposée monobare et réalisée dans un réacteur adiabatique et on calcule la température maximale théorique (température de flamme). On se place systématiquement dans le cadre de l'approximation d'ELLINGHAM.

## 1.2 Équilibres chimiques en systèmes fermés

Potentiel thermodynamique ; enthalpie libre d'un système.

$G = H - TS$ est définie comme une grandeur énergétique du système.
On justifie que $G$ est le potentiel thermodynamique adapté à l'étude des transformations isothermes, isobares et spontanées.

Expressions différentielles de $G(T, P, n_i)$.
Critère d'évolution d'un système : $dG_{T,P} \leqslant 0$.

On utilise les paramètres $(T, P, n_i)$ pour décrire les systèmes où les seuls travaux échangés sont ceux des forces de pression.

On exprime l'entropie créée en fonction de la variation d'enthalpie libre.

Identités thermodynamiques.
Potentiel chimique $\mu_i$.

On distingue les caractères intensif ou extensif des variables utilisées.
On définit le potentiel chimique $\mu_i$ à l'aide de la fonction enthalpie libre $G$.

Enthalpie libre d'un système chimique.
Expression de G en fonction des potentiels chimiques des constituants du système.
Relation de GIBBS-DUHEM.
Activité.
Expression du potentiel chimique dans chacun des cas :

- gaz parfait pur ou dans un mélange ;
- corps dans un mélange idéal de liquides ;
- corps solide ou liquide non miscible ;
- soluté dans une solution infiniment diluée ;
- solvant.

On adopte pour les potentiels chimiques une expression générale :

$$\mu_i(T, \text{composition}) = \mu_i^o(T) + RT\ln(a_i)$$

qui fait référence aux expressions des activités vues en première année. L'établissement de cette expression est hors programme.

Définition du potentiel chimique standard $\mu_i^o$ à une température $T$.

Les mélanges non idéaux, les coefficients d'activité, les lois de RAOULT et de HENRY sont hors programme.

Enthalpie de réaction, entropie de réaction, enthalpie libre de réaction et grandeurs standard associées.
Expression de $\mu_i^o$ en fonction de l'enthalpie molaire et de l'entropie molaire standard.
Expression de $\Delta_r G^o(T)$ en fonction des potentiels chimiques standard.
Expression $\Delta_r G^o(T)$ en fonction des enthalpies libres standard de formation $\Delta_f G^o$ des constituants à une température donnée.
Enthalpie libre standard de réaction. Expression de $\Delta_r G^o(T)$ en fonction de $\Delta_r H^o$ et $\Delta_r S^o$.
Influence de la température sur $\Delta_r G^o(T)$.
Relation de GIBBS-HELMHOLTZ.
Condition d'équilibre chimique à température $T$ et pression $P$ fixées.
Constante d'équilibre chimique, loi d'action des masses (relation de GULDERBERG et WAAGE) :

$$K^o(T) = Q_{\text{équi}}(\xi = \xi_{\text{équi}}) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^o}{RT}\right)$$

On précise que la constante d'équilibre est une caractéristique de la réaction qui ne dépend que de la température et de l'écriture conventionnelle de l'équation de la réaction. Elle peut être calculée à partir des données des tables thermodynamiques ou déterminée expérimentalement à partir du quotient de la réaction à l'équilibre chimique et à la température considérée.
Retour sur des exemples d'équilibres en solution aqueuse.

Relation de VAN'T HOFF.
Composition du système à l'état final : équilibre chimique ou transformation totale.

On détermine la composition chimique d'un système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique.

## 1.3 Optimisation thermodynamique d'un procédé chimique

| | |
|---|---|
| Critère d'évolution et d'équilibre d'une réaction chimique.<br>Relation entre enthalpie libre de réaction et quotient de réaction.<br>Expression<br>$$\Delta_r G = \Delta_r G^o + RT \ln Q$$ | On exprime $\mathrm{d}G(T, P, \xi)$ à partir de la principe.définition de $G$ et du second<br>On signale que le sens d'évolution peut être déduit de la comparaison de $Q$ et $K^o(T)$.<br>On donne l'allure de la courbe $G(\xi)$.<br>La notion d'affinité chimique est hors programme. |
| Caractérisation de l'état intensif d'un système en équilibre : nombre de degrés de liberté (variance) d'un système à l'équilibre. Facteurs d'équilibre. | Pour un système en équilibre, le calcul de la variance permet, via l'identification méthodique des variables intensives de description, une caractérisation de l'état intensif de celui-ci par la détermination de son « nombre de degrés de liberté ».<br>Le calcul de la variance par la règle de GIBBS n'est pas un but du programme. |
| Optimisation thermodynamique d'un procédé chimique :<br>• par modification de la valeur de $K^o$. Influence de la température à pression et composition, constantes : loi de VAN'T HOFF ;<br>• par modification de la valeur du quotient de réaction :<br>• influence de la pression à température et composition constantes : loi de LE CHATELIER ;<br>• influence de l'introduction d'un constituant actif et d'un constituant inactif à $(T, P)$ constants et à $(T, V)$ constants. | On souligne la distinction entre déplacement et rupture d'équilibre chimique. On utilise le critère d'évolution d'une réaction chimique.<br>L'étude de l'influence de la modification d'un paramètre (pression, température ou composition) sur un système chimique permet d'aborder la problématique de l'optimisation des conditions opératoires d'une synthèse. On identifie pour cela les paramètres d'influence et leur contrôle pour optimiser une synthèse ou minimiser la formation d'un produit secondaire indésirable.<br>On définit clairement les notions de composés actifs et de composés inactifs (ou inertes). On donne des exemples de l'effet de l'introduction d'un constituant.<br>On signale que les procédés de synthèse industriels modernes doivent concilier rentabilité et respect de l'environnement. |

## 1.4 Procédés industriels continus : aspects cinétiques et thermodynamiques

| | |
|---|---|
| Particularités des procédés industriels. | On précise que le transfert d'un protocole de laboratoire à l'échelle industrielle nécessite la mise en place d'un procédé industriel. |
| Opérations unitaires d'un procédé. | On signale qu'un procédé industriel peut être décrit comme la combinaison d'un nombre restreint d'unités opérationnelles ayant chacune leur finalité propre.<br>On exploite un schéma de procédé légendé pour identifier les différentes opérations unitaires. |
| Procédés discontinus ou continus. | On distingue un procédé discontinu d'un procédé continu. |
| Procédés continus en régime stationnaire : débit de matière en masse et en quantité de matière, bilan de matière. | On effectue un bilan de matière sur une espère chimique à partir de données sur les compositions et les débits entrants et sortants. |
| Aspects cinétiques des transformations en réacteur | On effectue un bilan de quantité de matière sur |

| | |
|---|---|
| ouvert :<br>Modèle du réacteur parfaitement agité continu en régime stationnaire dans le cas d'un écoulement de débits volumiques égaux à l'entrée et à la sortie.<br>Taux de conversion d'un réactif.<br>Temps de passage. Modèle du réacteur chimique en écoulement piston isotherme en régime stationnaire dans le cas de débits volumiques égaux à l'entrée et à la sortie du réacteur ; dimensionnement d'un réacteur en écoulement piston. | une espèce chimique.<br>On relie le taux de conversion du réactif au temps de passage pour une transformation de loi de vitesse de réaction donnée.<br>On établit un bilan de quantité de matière sur une espèce chimique.<br>On relie le taux de conversion en sortie d'un réacteur en écoulement piston et le temps de passage pour une transformation modélisée par une loi de vitesse donnée. |
| Étude thermique d'un réacteur ouvert :<br>Bilan énergétique sur un réacteur parfaitement agité continu en régime stationnaire dans le cas de débits volumiques égaux à l'entrée et à la sortie. | On effectue un bilan énergétique sur un réacteur ouvert afin d'établir une relation entre les températures d'entrée et de sortie, le taux de conversion et le flux thermique éventuellement échangé.<br>*Activité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, déterminer le(s) point(s) de fonctionnement (température et taux de conversion) d'un réacteur ouvert siège d'une transformation modélisée par une réaction isotherme unique et en discuter la stabilité.* |

## 2 Aspects thermodynamiques et cinétiques de l'électrochimie

*Dans cette partie, on étudie dans une approche principalement qualitative, les aspects thermodynamique et cinétique de l'oxydoréduction, les courbes courant-potentiel et leur application à l'étude de l'électrolyse, le phénomène de corrosion humide et la protection contre la corrosion et la conversion énergie chimique-énergie électrique et son stockage.*

*On illustre ces notions sur des applications concrètes, comme par exemple, la mise en oeuvre de capteurs électrochimiques dans l'analyse de l'eau, de l'air ou d'effluents. Concrètement, on exploite les courbes courant -potentiel pour justifier ou prévoir le fonctionnement de dispositifs d'intérêt industriel, économique et écologique mettant en jeu la conversion énergie chimique-énergie électrique, qu'ils soient sièges de réactions d'oxydoréduction spontanées (piles électrochimiques, piles à combustibles, phénomènes de corrosion humide) ou forcées (électrolyseurs et accumulateurs).*

*L'élève doit être capable de proposer l'allure qualitative de ces courbes à partir d'un ensemble de données cinétiques et thermodynamiques fournies*

*Les objectifs généraux de cette partie sont :*

- *choisir de manière rigoureuse et décrire le système physico-chimique étudié ;*
- *élaborer qualitativement des outils graphiques à partir d'un ensemble de données ;*
- *pratiquer un raisonnement qualitatif à partir de représentations graphiques.*

### 2.1 *Étude thermodynamique des réactions d'oxydoréduction*

| | |
|---|---|
| Pile électrochimique.<br>Relation entre enthalpie libre de réaction $\Delta_r G$ et potentiels des couples mis en jeu dans une réaction d'oxydo-réduction. Potentiel rédox.<br>Relation entre enthalpie libre standard $\Delta_r G^o$ de réaction et potentiels standard des couples impliqués. | La pile électrochimique a été étudiée en première année. On rappelle rapidement les notions de potentiel d'électrode et de réactions aux électrodes.<br>On exploite cette relation, sur un exemple, pour déterminer la valeur du potentiel standard d'un couple rédox à partir de données thermodynamiques. |

## 2.2 Étude cinétique des réactions d'oxydo-réduction : courbe courant-potentiel

Cette partie se fonde sur les acquis de cinétique chimique de première année et les prolongent par le tracé et l'exploitation de courbes courant-potentiel.

Les courbes courant-potentiel, dont le tracé est proposé en travaux pratiques, sont un outil essentiel dans la compréhension et la modélisation des systèmes électrochimiques.

L'écart entre le potentiel d'une électrode et son potentiel d'équilibre est appelé surpotentiel plutôt que surtension pour des raisons pédagogiques.

| | |
|---|---|
| Réaction électrochimique ; vitesse de réaction et intensité.<br>Surpotentiel.<br>Relevé expérimental des courbes courant-potentiel, également appelées courbes intensité-potentiel. Systèmes rapides et systèmes lents. Branches d'oxydation. Branches de réduction.<br>Palier de diffusion, courant limite de diffusion.<br>Allures des courbes courant-potentiel lorsqu'il y a plusieurs couples redox en solution, vagues successives, mur du solvant. | On décrit le montage à trois électrodes permettant de mesurer un surpotentiel, terme qui désigne l'écart entre le potentiel d'une électrode et son potentiel d'équilibre.<br>On souligne l'importance de la nature et de l'état de surface de l'électrode.<br>On cite les trois processus de transport de matière : diffusion, migration et convection.<br>On relie, à l'aide de la loi de Fick, l'intensité du courant de diffusion limite à la concentration du réactif et à la surface immergée de l'électrode. |
| Application des courbes courant-potentiel à la prévision des vitesses de réactions en solution, potentiel mixte, cémentation, action des acides sur les métaux. | On pourra étudier l'action de l'acide chlorhydrique sur le plomb et sur le zinc. |

## 2.3 Stockage et conversion d'énergie dans des dispositifs électrochimique

Cette partie s'appuie sur les courbes courant-potentiel pour étudier le fonctionnement des piles et leur recharge, ainsi que les électrolyseurs. Ces courbes permettent en effet de déterminer différentes caractéristiques : réactions aux électrodes, tension à vide, tension à imposer pour une recharge, etc.

### Conversion de l'énergie chimique en énergie électrique : fonctionnement des piles.

Approche thermodynamique. Transformations spontanées et réaction modélisant le fonctionnement d'une pile électrochimique.

Approche cinétique. Courbes courant-potentiel et fonctionnement d'une pile électrochimique.

| | |
|---|---|
| | On établit l'inégalité reliant la variation d'enthalpie libre et le travail électrique.<br>On cite la relation entre la tension à vide d'une pile et l'enthalpie libre de réaction.<br>On détermine la capacité électrique d'une pile en Ah.<br>On utilise les courbes courant-potentiel pour expliquer le fonctionnement d'une pile électrochimique et prévoir la valeur de la tension à vide.<br>On cite les paramètres influençant la résistance interne du dispositif électrochimique. |

### Conversion énergie électrique en énergie chimique

| | |
|---|---|
| . Caractère forcé de la transformation.<br>Électrolyseur. Généralités sur l'électrolyse : montage expérimental, anode, cathode, tension de seuil d'électrolyse.<br>Surpotentiel anodique, surpotentiel cathodique.<br>Relation entre la tension anode-cathode ($U_{AC}$) et l'intensité $I$.<br>Prévision des réactions aux électrodes.<br>Dépôt électrolytique : loi de Faraday.<br>Recharge d'un accumulateur, stockage de l'énergie. | On utilise les courbes courant-potentiel pour expliquer le fonctionnement d'un dispositif siège d'une électrolyse, prévoir la valeur de la tension de seuil et visualiser les facteurs cinétiques et thermodynamiques qui interviennent lors de l'électrolyse.<br>On signale que les réactions électrochimiques sont localisées à la surface des électrodes.<br>Les courbes courant-potentiel permettent de dégager la relation entre le courant d'électrolyse et la partie non ohmique de la tension ($U_{AC}$).<br>On montre sur un exemple comment les courbes courant-potentiel permettent d'interpréter les différentes réactions observées expérimentalement.<br>On évalue l'épaisseur d'un dépôt électrolytique ou la masse de produit formé pour une durée donnée d'électrolyse.<br>On exploite les courbes courant-potentiel pour justifier les contraintes (purification de la solution électrolytique, choix des électrodes) dans la recharge d'un accumulateur.<br>On étudie le fonctionnement d'une pile ou d'un électrolyseur pour effectuer des bilans de matière et des bilans électriques. |

## 2.4 Corrosion humide et électrochimique

| | |
|---|---|
| Corrosion humide, définitions.<br>Domaines d'immunité, de passivation et de corrosion d'un métal.<br>Réaction de corrosion : réactions partielles anodique et cathodique. | On définit ces notions, à l'aide d'exemples de diagrammes E-pH.<br>On signale la corrosion sèche d'un métal par l'oxygène. |
| Potentiel de corrosion, intensité de courant de corrosion, densité de courant de corrosion.<br>Corrosion uniforme en milieu acide, basique ou neutre (aéré ou désaéré).<br>Corrosion différentielle. | On interprète qualitativement un phénomène de corrosion uniforme à l'aide de données expérimentales, thermodynamiques et cinétiques.<br>On cite des facteurs aggravants de la corrosion.<br>On interprète qualitativement un phénomène de corrosion différentielle faisant intervenir deux métaux à l'aide de courbes courant-potentiel. |
| Protection contre la corrosion : protection par revêtement (rôle d'un film de peinture...), revêtements chimiques (phosphatation, chromatation, électrozingage...), protections cathodiques et anodiques (protection par anode sacrificielle, protection électrochimique par passivation, protection électrochimique par courant imposé). | On exploite des tracés de courbes courant-potentiel pour expliquer qualitativement :<br>• la qualité de la protection par un revêtement métallique ;<br>• le fonctionnement d'une anode sacrificielle. |

# ANNEXES

## 1 Liste de matériel

Le standard national du matériel des CPGE donne la liste globale et détaillée du matériel nécessaire à la mise en oeuvre du programme de physique et chimie en ces classes.

Le tableau ci-dessous donne le matériel nécessaire à la mise en oeuvre des programmes et que les élèves doivent savoir utiliser lors d'une évaluation pratique avec l'aide d'une notice simplifiée. Une utilisation de matériel hors de cette liste lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'instructions appropriées et d'une introduction guidée suffisamment détaillée.

## 2 Matériel

- verrerie classique de chimie analytique : burettes, pipettes jaugées et graduées, fioles jaugées, erlenmeyers, béchers, etc ;
- matériel classique du laboratoire de chimie : dispositifs de chauffage ou de refroidissement (bain-marie, bain froid, etc.), dispositifs d'agitation, matériel de filtration sous pression atmosphérique et sous pression réduite
- carte d'acquisition
- spectrophotomètre UV-visible
- pH-mètre et électrodes de mesure
- voltmètre et électrodes de mesure
- conductimètre et cellule de mesure
- thermomètre
- balance de précision

## 3 Outils mathématiques pour la chimie

*L'utilisation d'outils mathématiques est indispensable en sciences physiques. La capacité à mettre en oeuvre de manière autonome certains de ces outils mathématiques dans le cadre des activités relevant de la physique fait partie des compétences exigibles à la fin de la première année. Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que le niveau de maîtrise attendu en fin de première année. Il est complété dans le programme de seconde année. Cependant les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité sont traitées à l'aide d'outils numériques (calculatrices, logiciels de calcul numérique).*

| Programme | Savoir-faire mathématiques exigibles |
|---|---|
| **Équations algébriques :** | |
| Systèmes linéaires de $n$ équations à $p$ inconnues. | Identifier les variables (inconnues) nécessaires à la modélisation du problème sous forme d'un système d'équations linéaires. On donne l'expression formelle des solutions dans le seul cas $n = p = 2$. |

| | |
|---|---|
| Équations non linéaires. | Représenter graphiquement une équation de la forme $f(x) = g(x)$ et on interprète graphiquement la ou les solutions. |

**Équations différentielles linéaires et non linéaires :**

| | |
|---|---|
| Équations différentielles linéaires à coefficients constants. Identifier l'ordre d'une équation différentielle. Forme canonique. Mettre l'équation sous forme canonique. Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants : $y' + ay = f(x)$ | Identifier l'ordre d'une équation différentielle. Trouver la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène). Trouver la solution de l'équation complète correspondant à des conditions initiales données. Représenter graphiquement cette solution. Faire le lien entre les conditions initiales et le graphe de la solution correspondante. |

**Fonctions :**

| | |
|---|---|
| Fonctions usuelles ; Dérivée. Dérivée d'une fonction composée. Dérivée temporelle d'une fonction, notation $dx/dt$ ; Primitive et intégrale ; Valeur moyenne ; Représentation graphique d'une fonction. | Exponentielle, logarithme népérien et décimal, cosinus, sinus, tangente, puissance réelle ($x \rightarrow x^a$). Connaître et utiliser les développements limités à l'ordre 1 des fonctions $(1+x)^\alpha$ ; $\ln(1+x)$ et $\exp(x)$. |

## 4 Outils numériques pour la chimie

*La prise en compte de l'enseignement de l'informatique en sciences physiques est un défi important pour notre système éducatif. L'introduction d'activités numériques dans le programme des classes préparatoires prend en compte l'importance des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation et de la modélisation.*

*En sciences physiques, l'utilisation des outils numériques de codage en langage Python est centrée sur la découverte de cet outil de programmation et l'exploitation de fonctions extraites de ses diverses bibliothèques. Python - muni de ses nombreuses bibliothèques - est devenu le langage de référence dans les classes préparatoires scientifiques. Il peut être utilisé comme : simple calculatrice, outil de résolution, visualisation graphique (avec Matplotlib), simulation numérique (NumPy/SciPy), calcul formel (SymPy), réalisation d'interface graphique (TKinter, PyQt ⋯), production de sites, ⋯*

*Les activités numériques de codage fixées dans ce programme permettent aux élèves de développer des connaissances et des savoir-faire utiles à la physique comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.*

*Le tableau ci-dessous explicite les outils relatifs aux activités numériques ainsi que les savoir-faire exigibles en fin de première année. Il sera complété dans le programme de physique de seconde année.*

| **Programme** | **Savoir-faire exigibles** |
|---|---|
| **Outils numériques** | |
| Représentation graphique d'un nuage de points. | Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque Matplotlib pour représenter un nuage de points. |
| Représentation graphique d'une fonction. | Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque Matplotlib pour tracer la courbe représentative d'une fonction. |
| Courbes planes paramétrées. | Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque Matplotlib pour tracer une courbe plane paramétrée. |

### Équations algébriques

| | |
|---|---|
| Résolution d'une équation algébrique ou d'une équation transcendante : méthode dichotomique. | Déterminer, en s'appuyant sur une représentation graphique, un intervalle adapté à la recherche numérique d'une racine par une méthode dichotomique.<br>Mettre en oeuvre une méthode dichotomique afin de résoudre une équation avec une précision donnée. Utiliser la fonction `bisect` de la bibliothèque `scipy.optimize` (sa spécification étant fournie). |

### Intégration - Dérivation

| | |
|---|---|
| Calcul approché d'une intégrale sur un segment par la méthode des rectangles. | Mettre en oeuvre la méthode des rectangles pour calculer une valeur approchée d'une intégrale sur un segment. |
| Calcul approché du nombre dérivé d'une fonction en un point. | Utiliser un schéma numérique pour déterminer une valeur approchée du nombre dérivé d'une fonction en un point. |

### Équations différentielles

| | |
|---|---|
| Équations différentielles d'ordre 1. | Mettre en oeuvre la méthode d'EULER explicite afin de résoudre une équation différentielle d'ordre 1. |
| Équations différentielles d'ordre supérieur ou égal à 2. | Transformer une équation différentielle d'ordre n en un système différentiel de n équations d'ordre 1. `random` Utiliser la fonction `odeint` de la bibliothèque `scipy.integrate` (sa spécification étant fournie). |

### Probabilités – statistiques

| | |
|---|---|
| Variable aléatoire. | Utiliser les fonctions de base des bibliothèques Random et/ou Numpy (leurs spécifications étant fournies) pour réaliser des tirages d'une variable aléatoire.<br>Utiliser la fonction `hist` de la bibliothèque `matplotlib.pyplot` (sa spécification étant fournie) pour représenter les résultats d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire. Déterminer la moyenne et l'écart-type d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire. |
| Régression linéaire. | Utiliser la fonction `polyfit` de la bibliothèque Numpy (sa spécification étant fournie) pour exploiter des données. Utiliser la fonction `random.normal` de la bibliothèque Numpy (sa spécification étant fournie) pour simuler un processus aléatoire. |

# RELECTURE

# Sciences industrielles pour l'ingénieur



## 1 Préambule

Les ingénieurs de demain doivent répondre efficacement et de manière innovante aux besoins de progrès et d'amélioration de la qualité de vie des personnes et par ricochet participer dans le développement de la société dans un cadre plus large. Cette réponse se manifeste par leurs implications dans les divers secteurs de l'économie de production et de service. Ils participent aux processus de développement des systèmes à chaque étape de leurs cycle de vie, de la caractérisation du besoin jusqu'au recyclage, en respectant les contraintes écologiques visant un développement durable et en adoptant les règles et concept de l'éco-conception.

Ces nouvelles manières d'aborder les enjeux contemporains de notre société génèrent des problématiques complexes nécessitant la conception de systèmes innovants le plus souvent pluri -technologiques répondant exactement aux besoins des clients. Le développement, la réalisation et la mise en œuvre de ces systèmes nécessitent l'adoption d'une démarche d'analyse qui intègre une multitude de contraintes d'ordre réglementaire, écologique, technologique et économique.

La conciliation de ses contraintes avec les règles du marché en termes de délai et de compétitivité impose l'introduction des concepts de l'ingénierie numérique ainsi que les outils de résolution et de modélisation numérique dans le programme d'enseignement des SII.

## 2 Présentation

### 2.1 Objectifs de la formation

L'enseignement des sciences industrielles pour l'ingénieur (SII) nécessite la mobilisation des compétences scientifiques fondamentales transversales du programme du *Classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE)* ainsi que les outils d'analyse et de résolution numérique qui en découlent pour constituer une panoplie d'outils d'accompagnement de l'apprenant dans la recherche et la conception de solutions industrielles appropriées aux problématiques complexes liées au développement continu du processus industriel. Au terme des deux années de formation, l'appréhension des sciences industrielles vise le développement chez les élèves d'une vision globale de l'approche projet qui nécessite le développement des aptitudes de communiquer, de travailler en équipe, d'auto critique et d'ouverture.

Les compétences acquises doivent constituer une plate-forme solide sur laquelle prendra appui la formation dans les grandes écoles. Dans ces écoles, il sera question d'approfondir les savoirs appréhendés en CPGE, l'introduction et la découverte de nouvelles connaissances et compétences propres aux divers profils de formation au métier d'ingénieur.

Ce programme contribue aussi à l'approche pédagogique par les STEM (*Science, Technology, Engineering and Mathematics*) qui permet de favoriser le décloisonnement entre les disciplines enseignées en CPGE marocaines.

## 2.2 Démarche pédagogique et didactique de l'enseignant

L'approche des enseignements en SII s'organise autour de systèmes pluri-technologiques. Chaque système est défini à partir de besoins fonctionnels et d'exigences, de modèles numériques et d'un système matériel. Un système sera étudié dans sa globalité à partir de ces trois approches imbriquées :

- la réalité du besoin ou exigences fonctionnelles. Elle se décline dans le cahier des charges défini avec un client.
- la réalité virtuelle d'un système. Elle se traduit dans l'élaboration d'un modèle permettant de simuler son comportement afin d'en prévoir et d'en évaluer les performances.
- la réalité matérielle d'un système. Les performances du système matériel sont mesurées par expérimentation.

L'illustration de la figure 4.1 montre les trois représentations des systèmes et les écarts constatés entre les performances attendues, simulées et mesurées (Démarche d'ingénieur).

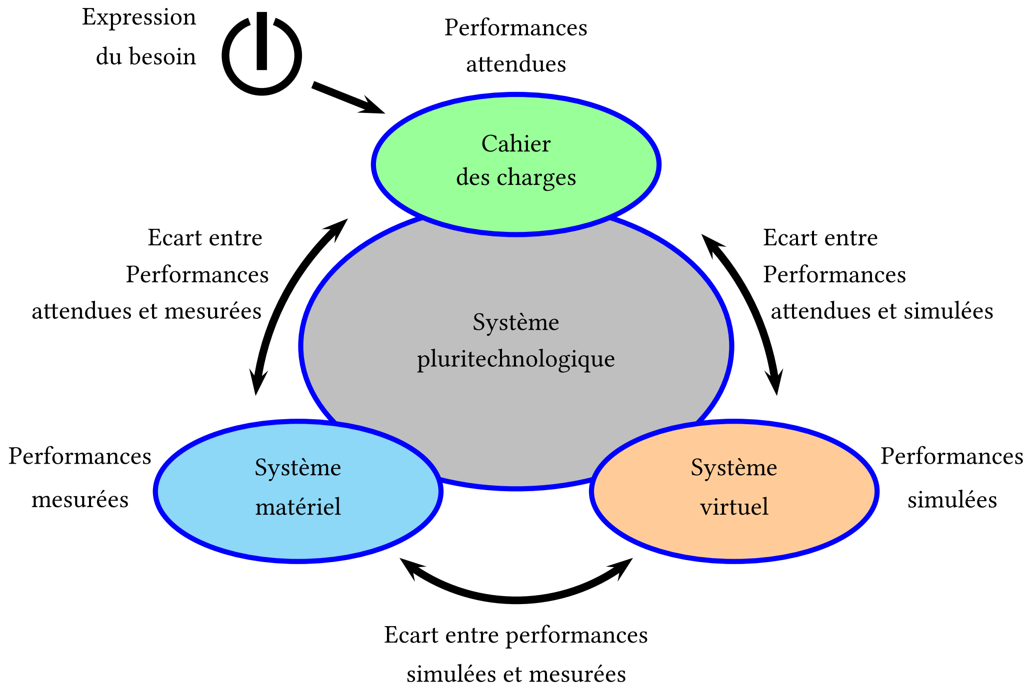


Figure 4.1 – Représentations des systèmes et les écarts constatés entre les performances attendues, simulées et mesurées

La démarche pédagogique en sciences industrielles de l'ingénieur vise à :

- s'approprier les trois réalités du système pluri-technologique (le cahier des charges, le système virtuel et le système matériel) ;
- comparer les performances issues de ces trois réalités ;
- optimiser le système virtuel et le système matériel afin de faire converger leurs performances vers celles attendues au cahier des charges.

Les contenus du programme des sciences industrielles de l'ingénieur permettent aux étudiants d'investir complètement la démarche de l'ingénieur en s'intéressant à toutes les représentations des systèmes. Pour cela, les enseignements en SII installent progressivement l'ensemble des connaissances et des compétences nécessaires à la maîtrise des différentes représentations d'un même objet ou système, à la comparaison des différentes performances, à l'optimisation des systèmes dans leurs réalités numérique et matérielle, afin de répondre aux attentes du client.

## 2.3 Compétences générales de l'ingénieur développées.

Les compétences développées en sciences industrielles pour l'ingénieur forment un tout cohérent, en relation directe avec la réalité industrielle qui entoure l'élève. Couplées à la démarche de l'ingénieur, elles le sensibilisent aux travaux de recherche, de développement et d'innovation.

Des solutions innovantes sont modélisées de façon numérique. Ces modèles numériques permettent la simulation du comportement des systèmes pluri-technologiques afin d'obtenir des performances simulées. Une démarche expérimentale menée sur des systèmes existants vient enrichir les compétences des étudiants au service de la démarche de l'ingénieur. Elle permet la comparaison des performances simulées et mesurées avec celles attendues au cahier des charges afin d'optimiser tout ou partie du modèle numérique.

Ces compétences sont :

**analyser :** permet des études fonctionnelles, structurelles et comportementales des systèmes conduisant à la compréhension de leur fonctionnement et à une justification de leur architecture. Via les activités expérimentales, elles permettent d'acquérir une culture des solutions industrielles qui facilitent l'appropriation de tout système nouveau. Cette approche permet de fédérer et assimiler les connaissances présentées dans l'ensemble des disciplines scientifiques de classes préparatoires aux grandes écoles ;

**modéliser :** permet d'appréhender le réel et d'en proposer, après la formulation d'hypothèses, une représentation graphique, symbolique ou équationnelle pour comprendre son fonctionnement, sa structure et son comportement. Le modèle retenu permet des simulations afin d'analyser, de vérifier, de prévoir et d'améliorer les performances d'un système ;

**résoudre :** permet de donner la démarche pour atteindre de manière optimale un résultat. La résolution peut être analytique ou numérique. L'outil de simulation numérique permet de prévoir les performances de systèmes complexes en s'affranchissant de la maîtrise d'outils mathématiques spécifiques ;

**Expérimenter :** permet d'appréhender le comportement des systèmes, de mesurer, d'évaluer et de modifier les performances. Les activités expérimentales sont au cœur de la formation et s'organisent autour de produits industriels instrumentés ou de systèmes didactisés utilisant des solutions innovantes. Elles permettent de se confronter à la complexité de la réalité industrielle, d'acquérir une culture des solutions technologiques, de formuler des hypothèses pour modéliser le réel, d'en apprécier leurs limites de validité, de développer le sens de l'observation, le goût du concret et la prise d'initiative ;

**Concevoir :** permet de modifier l'architecture des systèmes pour satisfaire un cahier des charges. Elle permet également de faire évoluer le comportement des systèmes. Elle développe l'esprit d'initiative et la créativité des élèves ;

**Communiquer :** permet de décrire, avec les outils de la communication technique et l'expression scientifique et technologique adéquate, le fonctionnement, la structure et le comportement des systèmes.

## 2.4 Activités d'enseignement.

Cours et TD : 2 heures hebdomadaires programmées, de préférence, le matin.

Travaux pratiques : 2 heures hebdomadaires par demi-classe découpée en groupes.

T.I.P.E : 2 heures hebdomadaires.

Colles : 30 min par élève par semaine.

## 2.5 Organisation du programme et volume horaire indicatif

| Thème | Partie | VHI[3] | Trim. |
|---|---|---|---|
| **Mécanique** | Dynamique<br>Cinématique<br>Théorème de l'énergie cinétique | 32h | Trim 1 |
| **Automatique** | Généralités et définition - Modélisation d'un système asservi | 10h | |
| **Automatique** | Simplification d'un modèle<br>Modèles de comportement d'un système<br>Réponses temporelles et fréquentielles<br>Performances<br>Amélioration des performances d'un système asservi. | 36h | Trim 2-3 |
| **IA** | | 8h | |

## 2.6 Progression

Un découpage trimestriel a été adopté pour développer le contenu du programme des sciences industrielles pour l'ingénieur. Dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant peut traiter le contenu relatif à un trimestre selon ses préférences et ses dispositions pédagogiques. Certaines notions et compétences du programme des sciences industrielles pour l'ingénieur sont en commun avec la physique ou l'informatique.

- la mention (***I***) indique que la notion est en commun avec l'informatique. L'enseignant se contentera de proposer à ses élèves des applications spécifiques à la SII ;
- la mention (***P***) indique que la notion est en commun avec la physique. L'enseignant doit se concerter en permanence avec le professeur de physique pour éviter toute répétition.

3. Volume horaire indicatif des activités pour, cours, TD et TP confondues en heures

# Premier trimestre



## 1 Mécanique

### 1.1 Cinétique

- volume, masse, centre d'inertie, principe de conservation de la masse ;
- opérateur d'inertie en un point :
  - définition,
  - matrice d'inertie,
  - directions principales,
  - influence de la symétrie matérielle sur la forme de la matrice d'inertie,
  - théorème d'Hyghens ;
- torseur cinétique : définition, expression dans le cas du solide indéformable ;
- torseur dynamique : définition, relation entre le moment cinétique et le moment dynamique ;
- energie cinétique : définition, expression dans le cas du solide indéformable ; notion d'inertie équivalente.

Les calculs intégraux des éléments d'inertie (matrice d'inertie, centre d'inertie) ne donnent pas lieu à évaluation. La relation entre la forme de la matrice d'inertie et la géométrie de la pièce est exigible. Un modèle de système de solides étant fourni, l'étudiant doit être capable de déterminer les torseurs cinétique et dynamique et l'énergie cinétique d'un ensemble de solides en mouvement par rapport à un référentiel.

### 1.2 Dynamique

- principe fondamental de la dynamique dans un repère galiléen ;
- théorèmes généraux ;
- applications : solide en rotation autour d'un axe fixe (Notion d'équilibrage statique et dynamique).

Un modèle de système de solides, en liaisons isostatiques étant fourni, l'étudiant doit être capable de :

- proposer ou compléter une méthode permettant de déterminer les inconnues de liaison ou les efforts extérieurs spécifiés dans le cas où le mouvement est imposé ;
- proposer ou compléter une démarche permettant de déterminer la loi du mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus ;
- choisir une méthode pour déterminer la valeur des paramètres conduisant à des positions d'équilibre.

### 1.3 Théorème de l'énergie cinétique

- puissance des efforts extérieurs à un système en mouvement par rapport à un repère ;
- cas particulier du solide indéformable ;
- puissance des efforts intérieurs à un système de solides indéformables ;
- perte d'énergie ;

Les compétences acquises doivent permettre de :

- associer les grandeurs physiques (Effort et flux) aux échanges d'énergie et à la transmission de puissance ;
- justifier le choix des constituants dédiés aux fonctions d'un système ;
- identifier les pertes d'énergie ;
- évaluer le rendement d'une chaîne d'énergie en ré-

- rendement d'une chaîne d'énergie en régime permanent ;
- théorème de l'énergie cinétique dans un repère galiléen : pour un solide et pour un ensemble de solides.

gime permanent ;

- déterminer la puissance des actions mécaniques extérieures à un solide ou à un ensemble de solides, dans son mouvement rapport à un autre solide ;
- déterminer la puissance des actions mécaniques intérieures à un ensemble de solides ;
- déterminer l'équation différentielle issue du théorème de l'énergie cinétique pour déterminer une inconnue (Effort ou loi de mouvement).

La résolution des équations différentielles de la dynamique peut être conduite indirectement par des logiciels adaptés. L'accent est alors mis sur la modélisation, l'acquisition correcte des données et sur l'exploitation des résultats.

# 2 Automatique

## 2.1 Généralités et définition - Modélisation d'un système asservi

- grandeurs d'entrée et de sortie ;
- capteur, chaîne directe, chaîne de retour, commande, comparateur, consigne, correcteur et perturbation ;
- poursuite et régulation ;
- systèmes linéaires continus et invariants :
  - causalité,
  - modélisation par équations différentielles,
  - transformées de Laplace,
  - fonction de transfert,
  - forme canonique,
  - gain, ordre, classe, pôles et zéros ;
- signaux canoniques d'entrée :
  - impulsion,
  - échelon,
  - rampe,
  - signaux périodiques ;
- schéma-blocs organique d'un système ;
- Élaboration, manipulation et réduction de schéma-blocs ;
- fonctions de transfert :
  - chaîne directe et chaîne de retour,
  - boucle ouverte et boucle fermée.

Les compétences acquises devront permettre de :

- identifier la structure d'un système asservi,
- établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert,
- modéliser le signal d'entrée.

L'utilisation des transformées de Laplace ne nécessite aucun prérequis. Leur présentation se limite à leurs énoncés et aux propriétés du calcul symbolique strictement nécessaires. Les théorèmes de la valeur finale, de la valeur initiale et du retard sont donnés sans démonstration. La résolution d'équations différentielles et les transformées inverses de Laplace ne sont pas au programme. L'étudiant doit être capable de modéliser un système par schéma blocs.

# Deuxième et troisième trimestre

## 2 Automatique *(suite)*

### 2.2 Modèles de comportement d'un système

- de premier ordre ;
- de deuxième ordre ;
- dérivateur ;
- intégrateur ;
- gain ;
- retard.

Un modèle de comportement est associé à une réponse expérimentale donnée. Seule la connaissance de la réponse temporelle à un échelon, du $1^{\text{er}}$ et $2^{\text{ème}}$ ordre, ainsi que du gain et de l'intégrateur, est exigible. L'enseignant présentera les expressions des solutions des équations différentielles pour les systèmes d'ordre 1 et 2 soumis à une entrée échelon (I). Les allures des solutions des équations différentielles d'ordre 1 et 2 pour les entrées de type impulsion, échelon, rampe et sinus doivent être limitées au régime permanent (I). La résolution des équations différentielles n'est pas au programme. D'un point de vue fréquentiel, seul le diagramme de Bode est développé pour l'identification d'un modèle de comportement. Seul le diagramme de Bode est au programme. On rappellera les techniques de détermination du temps de réponse à 5% et de la bande passante pour un système du premier et du deuxième ordre fondamental.

### 2.3 Réponses temporelles et fréquentielles d'un système de

- premier ordre fondamental ;
- deuxième ordre fondamental ;
- intégrateur :
  - réponse temporelle : temps de réponse à 5%,
  - réponse fréquentielle : diagrammes de Bode et Bande passante.

Les compétences attendues doivent permettre de :

- identifier les grandeurs d'entrée et de sortie d'un modèle ;
- identifier les paramètres d'un modèle ;
- identifier et justifier les hypothèses nécessaires à la modélisation ;
- donner l'allure de la réponse (temporelle et fréquentielle) attendue des modèles élémentaires ;
- identifier les paramètres caractéristiques d'un modèle du premier ordre ou du deuxième ordre à partir de sa réponse indicielle (I) (Les abaques nécessaires à l'identification sont fournis) ;
- identifier les paramètres caractéristiques d'un modèle de comportement à partir de sa réponse fréquentielle (I) ;
- tracer le diagramme asymptotique de Bode d'un produit de transmittances élémentaires ;
- proposer l'allure des diagrammes réels de Bode (se limiter aux cas usuels) (I).

## 2.4 Simplification d'un modèle

- linéarisation autour d'un point de fonctionnement :
  - non-linéarités (courbure, hystérésis, saturation et seuil) et retard pur,
  - point de fonctionnement ;
- pôles dominants et réduction de l'ordre du modèle :
  - principe,
  - justification.

L'étudiant doit être capable de :
- identifier les principales causes de non-linéarité ;
- valider la linéarisation du modèle autour d'un point de fonctionnement ;
- préciser les limites de validité d'un modèle ;
- réduire l'ordre de la fonction de transfert selon l'objectif visé, à partir des pôles dominants qui déterminent la dynamique asymptotique du système.

## 2.5 Performances

- rapidité ;
  - temps de réponse à 5%,
  - bande passante,
  - retard de traînage ;
- précision d'un système asservi :
  - définition de la précision en régime permanent,
  - précision en régime permanent pour une entrée en échelon et une entrée en rampe,
  - influence de la classe et du gain de la fonction de transfert en boucle ouverte ;
- stabilité :
  - définition entrée bornée - sortie bornée (EB-SB),
  - amortissement,
  - equation caractéristique : condition de stabilité,
  - position des pôles dans le plan complexe ;
  - critères de stabilité :
- critère graphique du revers dans le plan de Bode ;
- stabilité pratique : amortissement, dépassement relatif et marges de stabilité (de gain et de phase) ;
- ordre de grandeur, homogénéité des résultats.

L'étudiant doit être capable de :
- prévoir les performances en termes de rapidité ;
- relier la rapidité aux caractéristiques fréquentielles.

Il faut insister sur la nécessité de comparer des grandeurs homogènes, par exemple la nécessité d'adapter la sortie et sa consigne L'amélioration des performances apportée par la fermeture de la boucle est illustrée. Les compétences attendues doivent permettre de :
- déterminer l'erreur en régime permanent vis-à-vis d'une entrée en échelon (consigne ou perturbation), ou en rampe vis-à-vis de la consigne ;
- relier la précision aux caractéristiques fréquentielles ;

Il faut insister sur le fait qu'un système perturbé conserve la même équation caractéristique dans le cas de perturbations additives. Le critère algébrique de ROUTH est hors programme. On insistera sur l'influence du gain en boucle ouverte sur la stabilité, la rapidité et la précision. Les compétences requises devront permettre de :
- décider de la stabilité d'un système à partir de l'équation caractéristique ;
- déterminer les paramètres permettant d'assurer la stabilité du système ;
- relier la stabilité aux caractéristiques fréquentielles ;
- déterminer, analytiquement et graphiquement, ses marges de stabilité ;
- proposer une démarche permettant d'évaluer les performances d'un système asservi ;
- extraire un indicateur de performance pertinent à partir du cahier des charges ou de résultats issus de l'expérimentation ou de la simulation.
- caractériser les écarts entre les performances.
- interpréter et vérifier la cohérence des résultats obtenus expérimentalement, analytiquement ou numériquement (I).
- rechercher et proposer des causes aux écarts constatés.

## 2.6 Amélioration des performances d'un système asservi : correction

- notions sur la correction des systèmes :
  - action proportionnelle ;
  - action intégrale ;
  - action dérivée.
- réglage des correcteurs : compensation des pôles, réglage de marges, amortissement, rapidité et bande passante ;
- application aux correcteurs :
  - réglage du correcteur proportionnel,
  - réglage du correcteur proportionnel intégral (P.I),
  - réglage du correcteur à avance de phase ;
- modélisation par équations aux différences (équations de récurrence) d'un correcteur numérique (proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase) (I).

Les relations entre les paramètres de réglage fournies, l'étudiant doit être capable de :

- choisir un type de correcteur adapté ;
- proposer et mettre en œuvre la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase (I) ;
- déterminer les paramètres d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase ;
- modifier les paramètres et enrichir le modèle pour minimiser l'écart entre les résultats analytiques et/ou numériques et les résultats expérimentaux ;
- réaliser une intégration et une dérivation sous une forme numérique ;
- caractérisation des signaux à temps discret : échantillonnage et quantification.

Modéliser un correcteur numérique (I). L'enseignant mettra en évidence les limites du modèle continu à travers l'augmentation de la période d'échantillonnage. Les transformées en $z$ ne sont pas au programme.

## 3 Intelligence artificielle

Régression et classification : apprentissage supervisé et non supervisé. Phases d'apprentissage et d'inférence. Modèle linéaire : monovariable ou multivariable. Décomposition d'un problème complexe en sous-problèmes simples. Choix des algorithmes : réseaux de neurones, k plus proches voisins et régression linéaire multiple. Apprentissage supervisé. Choix des données d'apprentissage. Mise en œuvre des algorithmes : réseaux de neurones, $k$ plus proches voisins et régression linéaire multiple. Matrice de confusion : tableau de contingence, sensibilité et spécificité d'un test.

**analyser :** les principes d'intelligence artificielle (I)

Choisir une démarche de résolution d'un problème d'ingénierie numérique ou d'intelligence artificielle (I). Résoudre un problème en utilisant une solution d'intelligence artificielle (I). Des bibliothèques préimplémentées sont utilisées. Le candidat doit être capable de :

- interpréter et vérifier la cohérence des résultats obtenus expérimentalement, analytiquement ou numériquement (I) ;
- rechercher et proposer des causes aux écarts constatés.

*Il est à rappeler que l'enseignant devra se contenter de proposer à ses élèves des applications spécifiques à la SII. En cas de nécessité, et après concertation avec le professeur d'informatique, il pourra aussi présenter aux élèves des rappels et/ou des compléments de cours.*

# RELECTURE

PROGRAMME DE LA MATIÈRE

# Informatique

## 1 Préambule



Étant donné que les technologies de l'information et les sciences du numérique évoluent en permanence, le programme d'enseignement d'informatique en deuxième année MP et PSI doit également être constamment adapté pour suivre cette évolution.

En conséquence de cette nécessité, le Ministère de l'Éducation Nationale, du Préscolaire et des Sports, déploie d'importants efforts pour réviser régulièrement les programmes d'informatique dans les classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE) au Maroc. Par conséquent, ce document a été élaboré dans le but de :

- définir la nature et les caractéristiques de l'informatique en tant que discipline d'enseignement dans les classes préparatoires des grandes écoles (CPGE) ;
- délimiter le cadre et la vision du programme d'informatique en CPGE ;
- indiquer les compétences à développer chez les élèves ;
- fixer les finalités et les objectifs de chaque partie du programme ;
- établir une approche pédagogique qui servira de guide pour la préparation des activités d'apprentissage en informatique ;
- présenter le programme ainsi que la progression qui lui est attachée ;
- conseiller des exercices et des exemples d'applications relatifs aux différents éléments de ce programme.

Le but de ce document est de garantir que l'enseignement de l'informatique dans les classes préparatoires est en adéquation avec les réalités technologiques actuelles afin de préparer les élèves à réussir dans le monde en constante évolution de la technologie de l'information.

## 2 Contexte de la nouvelle réforme de l'informatique en C.P.G.E.

La nouvelle réforme du programme informatique dans les classes préparatoires vise à enrichir le contenu proposé aux élèves afin de leur fournir des outils plus novateurs et actuels qui peuvent leur être utiles dans la suite de leur parcours dans les grandes écoles d'ingénierie, ainsi que dans leur vie professionnelle.

Cette réforme vise également à promouvoir une approche interdisciplinaire, où l'informatique est intégrée à d'autres domaines tels que la physique, les mathématiques et les sciences d'ingénieur afin de permettre aux élèves d'utiliser l'informatique aussi bien telle quelle ou bien comme un outil pour résoudre des problèmes réels.

Il convient cependant de souligner que cette réforme ne se limite pas simplement à une extension du programme existant ; elle s'inscrit dans une démarche d'amélioration continue, visant à enrichir l'expérience des élèves en introduisant de nouveaux chapitres et en actualisant les contenus existants.

Parmi les nouveautés de cette réforme, l'intégration de quelques techniques de résolution de problèmes telles que l'approche gloutonne, la programmation dynamique, ainsi que les méthodes métaheuristiques représentées par la méthode de recuit simulé. Ces outils vont permettre d'élargir le champ des choix pour les élèves, et leur fournir une base solide pour résoudre des problèmes en relation avec leur domaine. De plus, ils pourront les utiliser pour rechercher des solutions à certains problèmes de la vie réelle à travers leurs travaux de TIPE.

# 3 Objectifs généraux de la formation

Ce manuel a pour objectif de présenter le contenu de la nouvelle réforme et mettre à jour la liste des objectifs visés tenant en compte les nouvelles parties introduites.

Les objectifs globaux du programme informatique peuvent être énumérés comme suivant :

- **Utiliser l'informatique pour modéliser et résoudre un problème de la vie réelle :** les élèves doivent être en mesure d'utiliser les différentes techniques et structures de données disponibles pour analyser, modéliser et résoudre efficacement des problèmes concrets. En comprenant les principes sous-jacents des algorithmes et des structures de données, les élèves peuvent choisir les approches les plus adaptées à leurs problèmes spécifiques. Ils doivent également être capables de concevoir des solutions informatiques robustes qui tiennent compte des contraintes de performance, de mémoire et de temps d'exécution.
- **Structurer une solution informatique :** la structuration d'une solution pour un problème informatique est une étape primordiale pour concevoir des solutions modulaires et faciles à entretenir. En décomposant les problèmes complexes en sous-problèmes plus gérables, les élèves peuvent mieux gérer la complexité et améliorer la lisibilité de leur code. En outre, cette approche favorise la réutilisation du code et facilite la détection et la correction des erreurs. Les élèves sont incités à décomposer leurs solutions en petites fonctions qui seront par la suite regroupées pour fournir la solution globale. Ce processus permet de mieux comprendre et organiser leurs codes, favorisant ainsi leurs maintenances.
- **Valider une solution :** cela nécessite de justifier que la solution fournit exactement le résultat attendu et que son temps d'exécution est raisonnable. Pour ce faire, l'élève doit développer un esprit critique envers les différents programmes qui lui seront demandés à réaliser. Cet esprit critique est très favorable pour familiariser les élèves à corriger et à améliorer leurs réalisations. En examinant de manière critique leurs propres solutions, les élèves peuvent identifier les erreurs potentielles, les inefficacités et les améliorations possibles. Cela favorise un processus d'apprentissage actif où les élèves acquièrent une compréhension approfondie des algorithmes, des structures de données et des bonnes pratiques de programmation. De plus, cette compétence d'évaluation critique est transférable à d'autres domaines de leur vie professionnelle, où la capacité à évaluer et à améliorer les solutions est essentielle.



# 4 Organisation et recommandations pédagogiques

## 4.1 Organisation temporelle de la formation

Le programme d'informatique en 2ème année des classes préparatoires vient consolider celui déjà vu en première année. Le programme se porte toujours sur les notions de base de la programmation en utilisant le langage Python. Le contenu de la formation en 2ème année est décomposé en deux périodes.

### Première période :

Pendant la première période, la notion de complexité algorithmique est abordée. Les élèves sont invités à calculer la complexité de leurs programmes, tant dans le scénario du pire cas que dans celui du meilleur cas, afin d'évaluer leurs programmes et de vérifier leur faisabilité. Comprendre la complexité algorithmique est crucial car elle permet d'estimer les ressources nécessaires à l'exécution d'un algorithme en fonction de la taille de l'entrée, ce qui est essentiel pour évaluer les performances et anticiper les limites de nos programmes.

Le concept de tri est également exploré. Cette notion est déjà introduite en première année, où les élèves sont déjà initiés à des algorithmes de tri simples tels que le tri par sélection, le tri par insertion et le tri à Bulles. En deuxième année, le cursus approfondit ces connaissances en présentant aux élèves des méthodes de tri plus efficaces, telles que le tri rapide, le tri par fusion. Cela permet aux élèves de développer une compréhension plus nuancée des algorithmes de tri et de choisir les approches les plus adaptées en fonction des besoins spécifiques de leurs projets.

Au cours de cette première période, les élèves exploreront une structure de données bien connue sous le nom d'arbre. Cette structure permet de représenter des données hiérarchiques, facilitant ainsi leur manipulation. Les arbres sont utilisés dans de nombreux domaines, tels que l'informatique, la biologie et la linguistique. En prenant des exemples de ces domaine, Cela permettra aux élèves de mieux comprendre leur utilité et d'exploiter leur compréhension pour créer et manipuler cette structure pour résoudre certains problèmes en relation avec leur domaine.

La première partie inclut également de nouveaux chapitres introduisant les méthodes de résolution de problèmes d'optimisation. Il s'agit notamment de l'approche gloutonne, de la programmation dynamique et des métaheuristiques. Ces techniques sont fondamentales pour résoudre un large éventail de problèmes d'optimisation rencontrés dans divers domaines, tels que l'ingénierie, les sciences économiques, la logistique, etc. Les élèves apprennent à formuler des problèmes d'optimisation, à concevoir des solutions efficaces et à évaluer les compromis entre différentes approches algorithmiques.

### Deuxième période :

Pendant cette deuxième période, les élèves vont explorer le domaine d'intelligence artificielle, et plus précisément le sous-domaine de l'apprentissage automatique (Machine Learning). Ils seront amenés à manipuler l' algorithme d'apprentissage supervisé K plus proches voisins (KNN) pour réaliser des classifications ou des régressions. De plus, ils vont pouvoir expérimenter le domaine de l'apprentissage non supervisé à travers l'algorithme K-means utilisé pour la segmentation de données. Ces notions visent à initier les élèves au domaine de l'intelligence artificielle et à leur permettre d'acquérir une vision plus claire et technique de ce domaine. Cela devrait leur permettre d'intégrer plus facilement cet outil pour résoudre des problèmes liés à leur Travaux d'Initiative Personnelle Encadrée (TIPE) ou à d'autres disciplines.

Pendant cette deuxième période, les élèves découvriront une nouvelle structure de données : les graphes. Après avoir exploré la terminologie associée à cette structure, ils seront amenés à s'attaquer à des problèmes classiques dont la résolution nécessite l'utilisation de ces structures. Le problème de recherche du chemin le plus court à origine unique est un bon point de départ. L'algorithme de Dijkstra pourra être utilisé pour résoudre ce type de problème.

Le Troisième chapitre de cette partie introduira aux élèves la notion des jeux à somme nulle, un concept fondamental de la théorie des jeux. Cette notion s'inscrit dans le cadre du chapitre sur les algorithmes heuristiques, où les élèves vont apprendre à utiliser ces algorithmes pour analyser et implémenter des jeux à somme nulle. L'algorithme Minimax fait partie du programme.

En dernière partie, les élèves exploreront le domaine des bases de données pour manipuler l'algèbre relationnelle et le langage SQL (Structured Query Language) afin d'organiser et gérer des données. En combinant la théorie de l'algèbre relationnelle avec la pratique de SQL, les élèves acquerront les compétences nécessaires pour concevoir, manipuler et interroger des bases de données relationnelles, ce qui est essentiel dans de nombreux domaines de l'informatique et de l'ingénierie.

Dans la suite de ce document, nous présenterons les détails des différents chapitres de cette deuxième année

## 4.2 Recommandations pédagogiques

L'enseignement de l'informatique en deuxième année MP et PSI dans les classes préparatoires aux grandes écoles vise plusieurs objectifs permettant aux élèves d'appliquer les bases de programmation acquises en première année pour résoudre numériquement des problèmes d'ordre scientifiques.

Le programme de l'informatique est organisé en deux périodes de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux périodes d'enseignement doit être respecté, en revanche, au sein de chaque période, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement.

Dans le cadre de ce programme, plusieurs recommandations pédagogiques sont à prendre en compte :

- raisonnement algorithmique privilégié : il est recommandé de mettre l'accent sur le raisonnement algorithmique beaucoup plus que sur la syntaxe du langage de programmation ;
- exemples et exercices multidisciplinaires : il est recommandé, de donner des exemples et de proposer des exercices inspirés des autres disciplines (mathématiques, physique, chimie et sciences d'ingénieur), concrets et inspirés du monde réel ;
- flexibilité dans l'organisation de l'enseignement : offrir une flexibilité dans l'organisation de l'enseignement, laissant aux professeurs la liberté d'adapter leur approche
- éviter les développements formels trop théoriques : les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de la formation de ces classes préparatoires.

# Première période

## 5 La complexité algorithmique

*L'objectif de cette section est d'introduire la notion de complexité algorithmique et d'encourager les élèves à l'utiliser comme une métrique permettant d'évaluer un programme informatique et de confirmer sa faisabilité. Les élèves doivent être capables de calculer la complexité pour un programme itératif ou récursif.*

| | |
|---|---|
| Introduction à la complexité | Introduire la notion de complexité et expliquer son intérêt.<br>Expliquer la différence entre la complexité temporelle et la complexité en espace.<br>Énumérer les différents cas d'étude de la complexité (meilleur, moyen, pire). La notion de complexité est abordée en classes prépas uniquement pour les scénarios meilleur et pire des cas. |
| Compter le nombre d'opérations | Calculer le nombre d'opérations élémentaires dans un programme itératif. |
| Notation asymptotique | Introduire la notation grand O et expliquer son intérêt. |

| | |
|---|---|
| Calculer la complexité pour un programme | Calculer la valeur asymptotique pour un programme itératif.<br>Énumérer les ordres asymptotiques classiques<br>Calculer l'ordre asymptotique pour un programme récursif (on peut passer par des approximations pour réduire les calculs) |
| Calculer la complexité spatiale d'un programme | Se limiter au calcul asymptotique dans le meilleur et le pire des cas |

## 6 Algorithmes de tri

*Cette section fait suite à celle étudiée en première année. L'objectif est d'explorer des algorithmes de tri plus efficaces tels que le tri rapide et le tri par fusion. Il est particulièrement intéressant de mettre l'accent sur certaines caractéristiques des algorithmes de tri, telles que la notion de tri en place et de stabilité.*

| | |
|---|---|
| Tri rapide | Définir le principe de l'algorithme de tri rapide. Implémenter le principe de cet algorithme. Comparer sa complexité avec celles des autres algorithmes. Discuter le choix du pivot. |
| Tri par fusion | Définir le principe de la méthode tri par fusion. Implémenter le principe de cette méthode. Comparer sa complexité avec celles des autres méthodes. |

## 7 Les arbres binaires

*Étant une structure de données très intéressante, les arbres présentent un moyen efficace pour stocker des informations et faciliter leur utilisation. Les élèves sont incités à manipuler cette structure. Ils doivent être en mesure de la définir en utilisant des listes, de la parcourir en largeur et en profondeur, de calculer sa hauteur, etc. Il est également intéressant de manipuler quelques structures d'arbre telles que les arbres binaires de recherche, les tas et autres.*

| | |
|---|---|
| Terminologie de base : noeud, racine, feuille, noeud interne, degré, ordre, chemin, profondeur, hauteur | Définir les différents composants d'un arbre ainsi que ses caractéristiques.<br>Calculer la hauteur d'un arbre.<br>Calculer la profondeur d'un nœud |
| Représenter et implémenter la structure arbre binaire | Définir un arbre en utilisant une liste |
| Parcourir un arbre binaire | Parcourir un arbre en profondeur en utilisant les parcours préfixe, infixe et postfixe. Parcourir également un arbre en largeur |
| Implémentations et manipulations d'autres variantes | Manipuler et implémenter des structures d'arbres classiques tel que les arbres binaires de recherche et les tas. |
| Manipuler et implémenter les arbres binaires de recherche | Relation d'insertion dans un arbre binaire de recherche, recherche d'une valeur, hauteur, Insertion, création, etc. |

## 8 Algorithmes gloutons

*L'intérêt de cette section est d'appliquer la technique de l'approche gloutonne pour résoudre des problèmes d'optimisation. Il est intéressant d'analyser la structure d'une solution gloutonne et de montrer, à l'aide d'exemples concrets, que cette stratégie ne permet pas toujours d'atteindre une solution optimale. La nature gourmande de l'approche gloutonne se manifeste par ses choix localement optimaux sans une évaluation exhaustive des conséquences globales.*

| | |
|---|---|
| Expliquer de façon simple la stratégie gloutonne : la propriété de sous-structure optimale | Utiliser des exemples simples pour appliquer le principe de la stratégie gloutonne. |
| Contre-exemple de la non-optimalité. | Montrer à l'aide d'exemples faites à la main que la stratégie gloutonne ne garantit pas toujours l'aboutissement à la solution optimale |
| Résoudre des problèmes d'optimisation classiques par l'approche gloutonne | Exemples : rendu de monnaie, sac à dos, arbre de Huffman |

## 9 Programmation dynamique

*L'objectif est de montrer aux élèves l'intérêt de la programmation dynamique et comment l'utiliser pour résoudre un problème d'optimisation. Les élèves doivent appliquer cette technique dans ses deux versions : top-down et Bottom-up. Pour maîtriser cette technique, on peut aborder des exemples de problèmes à une ou deux dimensions.*

| | |
|---|---|
| Expliquer l'intérêt de la programmation dynamique | Expliquer à quoi sert la programmation dynamique et son utilité pour réduire la complexité temporelle de certains problèmes.<br>Mettre en rapport le statut de la propriété de sous-structure optimale en programmation dynamique avec sa situation en stratégie gloutonne |
| Expliquer et implémenter les deux approches de la programmation dynamique (Top-Down et Bottom-Up) | Énumérer les caractéristiques de chaque méthode.<br>Analyser un programme d'optimisation simple et extraire les formules récursives qui le décrivent.<br>Utiliser ces formules récursives pour implémenter les deux approches de la programmation dynamique. |
| Implémenter des exemples classiques sur la programmation dynamique | Exemples : plus longue sous séquence commune, distance de Levenshtein, sac à dos binaire, etc. |

## 10 Meta Heuristique

*L'objectif de cette présentation est d'introduire l'approche métaheuristique dans le contexte de la résolution de problèmes d'optimisation. Les élèves doivent acquérir la compétence nécessaire pour appliquer cette approche à des problèmes relevant du domaine de l'informatique ou d'autres domaines en lien avec leur formation. Il est essentiel de souligner que l'approche métaheuristique ne garantit pas la découverte de la solution optimale, mais elle offre la capacité de trouver une solution approximative.*

| | |
|---|---|
| Définition et principe | Définir la notion de méta-heuristique et expliquer son principe.<br>Indiquer que ces méthodes sont employées pour aborder des problématiques variées issues de divers domaines. |

| | |
|---|---|
| Algorithme Recuit simulé | Expliquer son intérêt et son principe.<br>Implémenter son algorithme. |

# Deuxième période

## 11 Introduction à la théorie des graphes

*L'objectif de cette section est de définir la notion de graphes, comme étant des structures de données, ainsi que leurs représentations en Python et leurs manipulations. À la fin de cette section, les élèves doivent être en mesure de concevoir des solutions en utilisant des programmes Python pour résoudre divers problèmes inspirés du monde réel, qui peuvent être représentés par des graphes.*

| | |
|---|---|
| Vocabulaire des graphes | Présenter les notions suivantes à travers des exemples : graphe orienté/non orienté, sommets et arcs/arêtes, ordre et degré (entrant et sortant), chemin/chaîne et circuit/cycle, connexité dans les graphes non orientés.<br>Se limiter sur le cas des graphes simples : on n'évoque ni boucles, ni multi-arêtes. |
| Implémentation et manipulation des graphes | Expliquer comment implémenter des graphes à l'aide de listes d'adjacences (rassemblées dans une liste ou dans un dictionnaire) et à l'aide de matrice d'adjacence.<br>Donner des exemples pratiques de manipulation des graphes afin de bien maîtriser son implémentation. Par exemple :<br>➥ Ajout / suppression / test d'existence d'un arc/arête.<br>➥ Construction de la liste des voisins d'un sommet à partir de la matrice d'adjacence. etc. |
| Parcours d'un graphe :<br>➠ Parcours en largeur et en profondeur.<br>➠ applications. | Souligner les problèmes d'efficacité posés par l'implémentation des files par des listes et l'avantage d'utiliser la fonction `deque()` du module collections.<br>Expliquer et implémenter sur des exemples simples le principe des algorithmes de parcours.<br>Utiliser ces algorithmes de parcours pour détecter la présence d'un cycle/circuit dans un graphe, ou bien pour vérifier la connexité d'un graphe non orienté. |
| Pondération d'un graphe. Étiquettes des arcs ou des arêtes d'un graphe. | Expliquer l'intérêt d'ajout d'étiquettes aux arcs / arêtes d'un graphe à travers des exemples concrets. |
| Recherche d'un plus court chemin dans un graphe pondéré positivement | Expliquer le principe de l'algorithme de Dijkstra à l'aide d'un exemple de graphe pondéré à poids positifs.<br>Introduire l'algorithme A* comme étant une variante heuristique de Dijkstra. |
| Applications | Étudier quelques algorithmes classiques sur les graphes, comme : |

- La coloration des graphes.
- distances dans un graphe (Floyd-Warshall), etc.

## 12 Introduction à l’intelligence artificielle

*L’objectif de cette section est d’initier les élèves, d’une manière générale, au domaine de l’intelligence artificielle, et en particulier à l’apprentissage automatique et qui est utilisé pour résoudre des problèmes de classifications et de segmentations. A la fin de cette section, les élèves doivent être capables de comprendre et de résoudre des problèmes en appliquant des algorithmes de l’intelligence artificielle.*

| | |
|---|---|
| Introduction à l’intelligence artificielle : | Définir et expliquer son intérêt.<br>Énumérer ses sous-domaines.<br>Donner des exemples de son utilisation dans la vie courante. |
| Apprentissage supervisé :<br>- Problèmes de classification.<br>- Algorithme KNN.<br>- Matrice de confusion. | S’intéresser aux problèmes de classification auxquels on prédit la classe des nouvelles données, en se basant sur un ensemble de données déjà étiquetées avec leurs classes.<br>Présenter l’algorithme des k plus proches voisins (KNN) avec distance euclidienne comme exemple simple d’algorithme de classification, et l’appliquer sur un problème simple.<br>Expliquer comment évaluer la pertinence du choix du paramètre k de l’algorithme KNN à l’aide de la matrice de confusion. |
| Apprentissage non-supervisé :<br>- Problèmes de segmentation.<br>- Algorithme de k-moyennes. | S’intéresser aux problèmes de segmentations qui consistent à regrouper un ensemble d’éléments hétérogènes sous forme de sous groupes liés par des caractéristiques communes. Présenter l’algorithme de k-moyennes comme exemple simple d’algorithme de segmentation (clustering).<br>Appliquer cet algorithme sur un exemple simple, et observez sa convergence vers des minimums locaux. |
| Applications | Appliquer ces algorithmes sur quelques problèmes. |

## 13 Introduction à la théorie des jeux

*L’objectif de cette section est de fournir une introduction sur la théorie de jeux, en mettant l’accent sur le lien avec la théorie des graphes, et en se limitant seulement aux jeux d’accessibilité à deux joueurs. À la fin de cette section, les élèves devront avoir une compréhension solide des notions liées à la théorie des jeux d’accessibilité, ainsi que des idées sur les stratégies (algorithmes) utilisées pour les résoudre.*

| | |
|---|---|
| Jeux d’accessibilité à deux joueurs sur un graphe | Considérer des jeux d’accessibilité à deux joueurs modélisés par des graphes bipartis.<br>Expliquer les notions suivantes à travers un exemple de jeu d’accessibilité simple : état initial, états gagnants, partie du jeu, et graphe biparti du jeu. |
| Détermination des positions gagnantes par le calcul des attracteurs. Construction de stratégies gagnantes | Déterminer les positions gagnantes de chacun des joueurs en utilisant l’attracteur.<br>Expliquer comment construire les stratégies gagnantes pour chaque joueur (définie sur chaque position gagnante que le joueur contrôle). |

| | |
|---|---|
| Algorithme Minimax avec une heuristique | Introduire l'algorithme min-max comme alternatif dans le cas d'un jeu complexe ou le graphe associé est très gros.<br>Utiliser une heuristique pour privilégier le choix de certaines positions durant le jeu.<br>Appliquer l'algorithme Minimax sur un exemple de jeu simple. |

## 14 Les bases de données relationnelles

*Cette partie vise à initier les élèves aux bases de données relationnelles et leur manipulation à l'aide du langage SQL qu'on utilise avec SQLite, un système de gestion de base de données léger . À la fin de cette section, les élèves devront être capables d'exprimer des requêtes SQL permettant d'insérer, mettre à jour et supprimer des données d'une base de données relationnelles, ainsi que d'interroger une base de données pour extraire des informations précises à l'aide de requêtes avancées.*

| | |
|---|---|
| Vocabulaire des bases de données relationnelles | Présenter les concepts suivants à travers quelques exemples simples : table (relation), attribut (colonne), enregistrement (ligne), domaine et types de données, schéma de tables. |
| Modèle entités et associations | Expliquer les notions suivantes à travers des exemples simples : entité, association, attributs, identifiant, et cardinalités. |
| Notion de clé :<br>• clé primaire ;<br>• clé étrangère. | Une clé primaire n'est pas forcément associée à une unique colonne même si c'est le cas le plus fréquent.<br>Expliquer le rôle des clés primaires et étrangères pour mettre le lien entre les différentes tables d'une BD relationnelle. |
| Passage du modèle entité-association au modèle relationnel : transformation des entités et associations en des tables (relations). | Transformer une entité en une relation (table).<br>Séparer une association * - * en deux associations 1 - *.<br>Utiliser les clés primaires et clés étrangères pour traduire les associations 1 - 1 et 1 - *. |
| Langage SQL et Manipulation des données (insertion, modification et suppression des lignes d'une table). | Introduire le langage SQL et présenter SQLite comme SGBD à utiliser.<br>Présenter la notion de requête SQL et donner la syntaxe des différentes requêtes de manipulation de données : requêtes `INSERT INTO`, `UPDATE` et `DELETE FROM`. |
| Interrogation d'une base de données relationnelle : requête `SELECT` (projection) avec simple clause `WHERE` (sélection). | Expliquer les notions de projection et sélection, en donnant leurs notations en algèbre relationnelle ainsi que les requêtes `SELECT` équivalentes.<br>Expliquer l'intérêt d'utilisation du mot clé `DISTINCT`.<br>Utiliser les opérateurs suivants pour exprimer des conditions : `=`, `!=`, `>`, `<`, `>=`, `>=`, `AND`, `OR`, `NOT`, `IN`, `LIKE`, `BETWEEN`... `AND`... |
| Opérateurs ensemblistes : union, intersection, différence, et produit cartésien. | Donner des exemples de requêtes SQL auxquelles on combine les résultats de plusieurs requêtes avec `UNION`, `INTERSECT` ou `EXCEPT`.<br>Expliquer avec un exemple la notion de produit cartésien, comme étant un outil permettant de combiner les résultats venant de différentes tables. |
| Jointure interne avec opérateur d'égalité (`JOIN`... `ON`... =...). | Introduire la notion de jointure en mentionnant le fait que le résultat d'un produit cartésien peut ne pas avoir de sens.<br>Utiliser les jointures internes pour effectuer des requêtes croisées dans une base de données constituée de plusieurs |

| | |
|---|---|
| | tables.<br>Consolider les acquis à travers des exemples d'application. |
| Renommage `AS` des tables et des colonnes | Expliquer, avec des exemples, l'intérêt du renommage temporairement d'une colonne ou d'une table dans une requête SQL. |
| Fonctions d'agrégation et groupement des lignes avec la clause `GROUP BY` | Appliquer des fonctions d'agrégation sur des groupes de lignes d'une table, qu'on partitionne selon un critère donné portant sur des colonnes (`GROUP BY`). Mettre en œuvre des agrégats, en utilisant les fonctions `MIN`, `MAX`, `SUM`, `AVG` et `COUNT`. Mentionner le fait que les fonctions d'agrégations peuvent s'appliquer sur un seul groupe qui contient toutes les lignes de la table (s'il n'y a pas de `GROUP BY`). |
| Filtrage des agrégats avec `HAVING` | Filtrer des agrégats avec `HAVING` pour limiter l'affichage sur les groupes qui vérifient une condition donnée.<br>Marquer la différence entre `WHERE` et `HAVING` sur des exemples. |
| Modification d'affichage : tri des résultats et limitation d'affichage | Utiliser le mot-clé `ORDER BY` pour trier les lignes résultats d'une requête `SELECT`, par rapport à la valeur d'une ou plusieurs colonnes.<br>Utiliser le mot-clé `LIMIT` pour limiter le nombre de lignes affichées par une requête `SELECT`.<br>Utiliser le mot-clé `OFFSET` pour sauter un certain nombre de lignes. |
| Requêtes imbriquées : syntaxe et opérateurs de comparaison | Expliquer la syntaxe générale des sous-requêtes dans une clause `WHERE`, `FROM`, ou `HAVING`.<br>Utiliser les opérateurs `=, <, >, !=, <=, >=`, `IN` / `NOT IN`, et `EXISTS` / `NOT EXISTS`, pour comparer les résultats de sous-requêtes.<br>Donner quelques exemples de requêtes imbriquées. |

PROGRAMME DE LA MATIÈRE

# Culture Arabe et Traduction

RELECTURE

| الثقافة العربية و الترجمة والغرب | | |
|---|---|---|
| الحصة | نوعها | النشاط |
| 1 | تقديم<br>تعريب | تقديم المادة و المقرر وأساليب الترجمة (30min)<br>Le passeur, Henri Meschonnic |
| 2 | تعجيم<br>تعريب | لماذا نترجم، أدونيس<br>Les coquelicots de l'Oriental, Brick Ousaid |
| 3 | تعبير كتابي<br>( المنهجية والموضوع ) | يختار الأستاذ الموضوع تماشيا مع محاور المقرر. |
| 4 | فرض | فرض محروس |
| 5 | تعريب<br>تعجيم | Correction du DS : 30 mn avec corrigé distribué aux élèves + L'expérience impériale, Ashis Nandy (45 minutes)<br>الثقافة الوطنية، عبد الله العروي (45 دقيقة) |
| 6 | تعريب<br>تعجيم | Roman maghrébin et culture nationale, Abdelkébir Khatibi<br>الغرب وتحديث العالم العربي، محمد بنيس |
| 7 | تعبير كتابي | يختار الأستاذ الموضوع تماشيا مع محاور المقرر |
| 8 | فرض | فرض محروس |
| 9 | تصحيح | تصحيح الفرض المحروس |

RELECTURE

PROGRAMME DE LA MATIÈRE

# Français

Le programme de la deuxième année des CPGE scientifiques et techniques vise un approfondissement des savoirs et des savoir-faire acquis en première année. Il est constitué de trois composantes complémentaires.



## 1 Littérature et philosophie

Le programme de français-philosophie de la deuxième année des CPGE scientifiques et techniques est articulé autour d'un thème renouvelé chaque année. Par exemple, pour la session 2022, le thème retenu était « l'animal » ; pour 2023, « le monde », pour 2024, « la violence » et pour 2025, le thème est « l'image ».

L'étude du thème de l'année est principalement orientée vers la préparation de l'épreuve de « dissertation de culture générale », proposée dans les concours marocains et étrangers. Cette étude vise à fournir aux élèves les notions, les idées et les exemples nécessaires pour étayer leur réflexion personnelle et développer leur argumentation.

L'exploration méthodique du thème se réalise à travers une progression annuelle élaborée au début de l'année par chaque professeur. Cette progression, cohérente et progressive, est constituée de six séquences au moins, articulées chacune autour d'une problématique dérivée du thème de l'année. Chaque problématique traitée devrait permettre d'explorer un ou plusieurs aspects du thème sur les plans philosophique et littéraire, comme elle peut ouvrir le champ de l'étude vers d'autres domaines de la culture générale : artistique, scientifique, économique, etc.

Le traitement de chaque problématique devrait reposer sur l'analyse comparative de groupements de textes, ou sur l'étude de textes consistants (chapitres par exemples) ou d'une œuvre intégrale. Pour plus de cohérence, le professeur mettra à profit les séances consacrées au résumé et à la synthèse de textes pour proposer des extraits pertinents qui éclairent, approfondissent ou prolongent son étude du thème de l'année.

Le travail sur les textes devrait également donner lieu à des activités visant l'exploitation et l'appropriation des ressources linguistiques offertes par les textes étudiés en vue de développer l'expression écrite et orale des élèves. Ces activités porteront sur l'acquisition du vocabulaire thématique et sur la maîtrise des structures grammaticales et des organisateurs textuels utiles pour la réception et la production de textes argumentatifs

## 2 La méthodologie

C'est la deuxième composante du programme. Elle vise principalement la maîtrise de la méthodologie des exercices proposés aux concours d'entrée aux grandes écoles de commerce au Maroc et à l'étranger.

### 2.1 Le résumé de texte

L'initiation à cet exercice ayant été faite en première année, l'objectif en deuxième année est d'approfondir le savoir-faire déjà acquis à travers le développement des capacités suivantes :

- analyser des textes argumentatifs de longueur croissante (de 1500 à 4000 mots), et de difficulté progressive (au regard de la complexité du raisonnement et du degré d'abstraction) ;

- recomposer, en un temps limité, le circuit argumentatif d'un texte relativement long et complexe et reconstituer son plan ;
- identifier la thèse d'un texte et reconnaître la stratégie argumentative adoptée par l'auteur ;
- reproduire d'une manière claire, et dans un style personnel, l'essentiel d'un raisonnement abstrait, en respectant la structure, la tonalité et le mode d'énonciation du texte de départ ;
- respecter l'équilibre d'ensemble des différentes parties qui composent un texte et les étapes du raisonnement qui le sous-tendent ;
- reformuler d'une manière synthétique un exemple, un récit, une description ou une citation à valeur argumentative ;
- respecter le nombre de mots prescrit par la consigne ;
- résumer des textes de longueurs variées (de 1500 à 4000 mots) en un temps limité ;
- toute autre compétence jugée utile par le professeur.

### 2.2 La dissertation

Lors de la deuxième année, l'élève consolide sa capacité à rédiger une dissertation intégrale de culture générale, selon les normes des différents concours. Pour cela, il devra renforcer les capacités suivantes, déjà acquises en première année :

- comprendre sans difficulté un sujet de dissertation (en analysant les termes et leurs relations, les présupposés et les limites de ce sujet) ;
- problématiser un sujet de dissertation et formuler une problématique claire en vue de le traiter ;
- mobiliser les éléments de culture générale (littérature, philosophie, sciences humaines, arts, etc.) nécessaires pour alimenter son argumentation ;
- regrouper et hiérarchiser des idées en vue d'élaborer un raisonnement structuré et progressif ;
- Construire un plan détaillé de la dissertation avec des parties, des sous-parties et des exemples ;
- argumenter à l'aide de références culturelles étudiées en culture générale ;
- rédiger, en temps limité, une dissertation intégrale de culture générale ;
- toute autre compétence jugée utile par le professeur.

### 2.3 La synthèse de textes

Bien que cet exercice ne soit pas très présent dans les concours d'entrée aux écoles d'ingénieurs, le professeur veillera quand-même à le pratiquer avec ses élèves quand il le juge nécessaire. Il est à signaler que cet exercice présente surtout un intérêt pédagogique puisqu'il permet de traiter méthodiquement des groupements de textes sur une thématique donnée en développant les capacités d'analyse et de synthèse.

## 3 La communication orale

Cette composante prépare les élèves à passer les épreuves orales des concours d'entrée aux écoles d'ingénieurs dans les meilleures conditions. Le développement de la communication orale chez les élèves de la deuxième année s'articule autour des capacités suivantes :

- écouter activement autrui afin de comprendre son message et réagir d'une manière appropriée en liant ses interventions à celles de ses interlocuteurs ;
- exposer ses idées et ses opinions et argumenter avec conviction sur des sujets complexes en apportant des explications appropriées, des arguments et des commentaires ;

- développer méthodiquement une argumentation en mettant en évidence les points significatifs et les éléments pertinents ; Développer une argumentation claire, en élargissant et confirmant ses points de vue par des arguments secondaires et des exemples pertinents ;
- faire un exposé clair en avançant des raisons pour ou contre un point de vue particulier et en présentant les avantages et les inconvénients d'options diverses. Prendre en charge une série de questions, après l'exposé, avec un degré d'aisance et de spontanéité qui ne cause pas de tension à l'auditoire ou à lui/elle-même ;
- présenter un sujet complexe, bien construit, avec assurance à un auditoire en structurant et adaptant l'exposé avec souplesse, pour répondre aux besoins de cet auditoire. Gérer un questionnement difficile, voire hostile ;
- soutenir un débat, même sur des sujets abstraits, complexes et non familiers. Argumenter une prise de position de manière convaincante en répondant aux questions et commentaires ainsi qu'aux contre-arguments avec aisance, spontanéité et pertinence.

Comme on peut le constater, les composantes du programme de français-culture générale en classes préparatoires économiques et commerciales présentent une cohérence et une complémentarité. En effet, chaque séquence d'enseignement comporte des activités qui intègrent harmonieusement les objectifs des trois composantes : le développement des compétences méthodologiques s'appuie sur un contenu culturel et mobilise l'aptitude à la communication.

# RELECTURE

PROGRAMME DE LA MATIÈRE

# Anglais



## 1 Introductory Statement

Introductory Statement This document serves as a continuation of the first-year general guidelines. Its primary goal is to establish a standardized pedagogical framework aimed at promoting a coherent and unified approach to the teaching of English as a foreign language across Moroccan CPGE (Classes Préparatoires aux Grandes Écoles). The second-year classes teachers are encouraged to implement the teaching guidelines and practices outlined herein, beginning with the 2025-2026 academic year.

Constructive feedback, suggestions, and recommendations regarding any aspect of this document are welcome and should be directed to the National Coordination of English for CPGE or to Inspector/Coordinator of the English department at noubendouqi@gmail.com. All submissions will be reviewed and given appropriate consideration in future updates.

Students pursuing their studies in the second-year preparatory classes- in scientific, technological and management streams- are supposed to have acquired the core thematic, cognitive and linguistic contents and skills as stipulated in the syllabus of the first year. Therefore, teachers are expected to build on those assets and provide their students with the appropriate teaching resources along the second-year prescribed guidelines.

## 2 Goals and aims

Here is a reminder of the goals and aims of teaching English in the CPGE:

- to enable the learners to enhance their linguistic and communicative competencies in the four areas of the English language system;
- to promote the learners' awareness of their cultural identity and further their understanding of cross-cultural differences;
- to develop critical thinking and responsible citizenship in students;
- to help students analyze different viewpoints in scientific, technological and business texts;
- to help the learners develop their autonomy and independence and enable them to interact effectively and appropriately with the different environment;
- to equip learners with basic academic and study skills that enable them to successfully meet the demands of higher education and adapt to the evolving requirements of the job market.

## 3 Specific Performance Objectives - Second Year Level

The following objectives are intended to serve as reference points for teachers as they plan, organize, and implement classroom instruction and learning activities. They reflect the thematic, cognitive, linguistic, and interpersonal goals expected at this advanced stage of preparatory studies:

1. to enhance learners' rhetorical competence in English, with a focus on understanding the structural features of academic discourse and fostering both cross-linguistic and pragmatic awareness through comparative and contextualized practice;

2. to broaden learners' understanding of sustainable and human development, by introducing them to diverse models of effective leadership, governance, and resource management within a globalized context;
3. to consolidate and extend previously acquired linguistic and cultural competencies, ensuring that foundational knowledge is revisited, strengthened, and integrated into new learning contexts;
4. to cultivate a collaborative learning environment, encouraging students to engage in teamwork, cooperative inquiry, and reflective dialogue, while developing critical perspectives on the content and issues discussed;
5. to refine learners' test-taking strategies across the key language skills of reading, writing, and translation, with an emphasis on analytical reasoning and time management;
6. to familiarize students with a variety of academic test formats, enhancing their ability to interpret task instructions accurately and respond effectively under exam conditions.

## 4 Assessment and Evaluation

Assessment is an integral part of the learning and teaching process. It helps students to understand what they can do with English and what areas of the language they need to improve because of the backwash effect it offers for both students and teachers. "The Race to the Top (RTTT) Assessment" policy adopted in the CPGE has however imposed new roles on both teachers and students in order to maximise learning and at the same time abide by the principles of reliability, validity and fairness. In CPGE, students are tested at regular intervals to gauge their progress towards the set standards bearing in mind the administrative calendar. Throughout the whole year teachers generally administer two types of tests, namely written tests "Devoirs Surveillés" (DS) and oral ones (Colles). (c.f. Term assessment specifications grid), together with a number of quizzes of different types. Students are also assessed by submitting a specific number of "Devoirs Libres" (DL). In the English department, they are referred to as independent work. CPGE students need also to be well-prepared for rigorous national and international examinations to gain admission to prestigious institutions. This preparation requires the coverage of all the course components, be they thematic, cognitive or linguistic.

At the cognitive level, students need to develop effective study skills, time management strategies, and test-taking techniques. Regular practice through mock exams and standardized test preparation materials can help students become familiar with the exam format and help them reduce anxiety. Additionally, understanding the specific requirements and expectations of each examination, whether it is the TOEIC, SAT, TOEFL, or other entrance exams, allows students to tailor their study plans accordingly. Comprehensive preparation therefore ensures that students not only meet but exceed the academic standards required by top-tier institutions. This strategic approach to exam readiness enhances their chances of securing admission and scholarships to renowned universities in Morocco and abroad.

## 5 Thematic contents – SECOND YEAR

*The main theme and the selected sub-themes for the 2025-2026 academic years are scheduled as follows:*

| **Main theme** | **The business environment in a Digitized world** | **Knowledge management & Social entrepreneurship** |
|---|---|---|
| Subthemes | Digitization & Jobs of the future | Knowledge management & Social entrepreneurship |

| | | |
|---|---|---|
| | | Social entrepreneurship & technology in the digital economy |
| Theme-related expected learning outcome | Students are sensitized to the digitalization process around the globe. | Generating wealth depends on true involvement in local & international trade and an understanding of finance issues in a digitized world |
| | Students demonstrate sensitivity towards the impact of the internet on future jobs. | To create wealth in a dynamic society requires coping with technological progress in local and global environments. |
| Statement of Inquiry | A mindset of an IT literate promotes a healthy integration in global business environments. | Creating wealth & prosperity is a result of awareness of finance issues around the globe |
| | Abundant job opportunities around the globe nowadays is a result of strong economies, skilled people with creative ideas, and appropriate professional environments. | A recognition of the intersections between culture, communication, technology & business are key to successful social entrepreneurship. |
| Suggested Topics. | Smart cities & technological development. | International Trade and cashless societies. |
| | The new industrial revolution & the Internet of Things. | Local businesses and Start-ups. |
| | Future Jobs in the digital world. | Data Management Vs knowledge management. |
| | | Social & emotional intelligence. |

Revisiting/Recycling main themes & skills for the standardized tests & preparation for the national & International tests. % . This justifies the grade the student gets in term 6.

## 5.1 Independent Project

The project to be conducted by students individually under one of the main themes:

- going digital in a multilateral world: digital mind, digital life and digital business;
- s recognition of the intersections between culture, communication, technology & business are key to successful social entrepreneurship.

| **The business environment in a Digitized world** | **Knowledge management entrepreneurship & Social** |
|---|---|
| Progress & development | ▸ Culture & identity;<br>▸ Human values and Global citizenship;<br>▸ Communication & cooperation;<br>▸ Art and technology. |

## 6 Cognitive contents and skills SECOND YEAR

As part of our commitment to building lifelong learners and independent thinkers, this year's focus for second-year students includes a structured development of essential cognitive skills and strategies as a further developments of the first year's program. These contents aim to foster students' ability to research effectively, prepare for and approach assessments with confidence, and engage in thoughtful, critical thinking across disciplines.

This program is designed to support students in becoming more autonomous, reflective, and strategic in their learning and teachers in integrating cognitive skill-building into their classroom instruction in meaningful and transferable ways.

The modules are grouped into three main categories:

- Study Skills & Research: developing techniques to search for information online, assess source credibility, and carry out structured research tasks.
- Reviewing & Test-Taking: building practical strategies to prepare for different types of tests, read assessment tasks critically, and take purposeful notes.
- Critical Thinking: encouraging students to explore different perspectives, question assumptions, analyze reasoning, and develop informed opinions.

Together, these sets of skills provide a strong foundation for academic success and are aligned with 21st-century learning expectations. We invite both students and teachers to approach these contents not just as tasks to complete, but as tools for thinking, questioning, and growing.

## 7 Linguistic skills_SECOND YEAR

As part of the CPGE requirements, and in order to help the candidates be better prepared for the academic and professional requirements, the Second Year Linguistic Skills program is designed to equip students in the Classes Préparatoires aux Grandes Écoles (CPGE) with the advanced tools they need to succeed in both competitive exams and higher education contexts, where analytical communication and language precision are critical.

Second year's program emphasizes a comprehensive, skills-based approach to English language learning, focusing on critical reading, visual and auditory comprehension, oral communication, and writing. It goes beyond basic fluency to develop meta-linguistic awareness and strategic competence in both academic and real-world scenarios.

Specifically, the linguistic contents and skills should enable students to:

- analyze texts with depth and accuracy;
- listen actively and interpret complex visual and auditory messages;
- speak clearly, fluently, and persuasively in academic or professional settings;
- write effectively, using logical structure, argumentation, and coherence.

The skills outlined are not isolated competencies, but interconnected dimensions of language mastery that enhance critical thinking, argument construction, and cross-cultural communication. Whether preparing for oral examinations, written tasks, or academic debates, students are encouraged to engage with language as a tool for inquiry, analysis, and expression.

Teachers are invited to guide learners not just toward performance, but toward language empowerment, where students develop ownership of their expression and voice in English. Language is therefore viewed not only as a subject to study, but as a means to think, reason, and connect. Please find below a more detailed organisation of these contents and skills.

## 7.1 Critical Reading Subskills

To meet the demanding cognitive and linguistic expectations of national and international examinations, second-year CPGE students are required to cultivate advanced language skills across multiple domains. The following subskills are designed not only to enhance learners' comprehension and analytical abilities but also to equip them with practical strategies for tackling complex tasks in academic and assessment contexts.

### Idea Analysis:

- Comparing and contrasting text information;
- recognize logical fallacies;
- identify the writer's attitude or bias; identify the mood or the tone of the writer.

### Critique Content and Textual Elements

- Understand the macrostructure of texts and quickly extract relevant information;
- analyze texts to recognize explain text organizational pattern (classifying, cause and effect, sequencing, describing, etc.);
- recognize cohesive patterns;
- transcode information into tabular form (tables, graphs, diagrams, etc.);
- describe, interpret or represent information in a different way (e.g. Use graphs / diagrams or infer cause and consequence, etc.);
- paraphrase Ideas and Sentences.

### Displaying Comprehension: evaluate Content and Textual Elements

- Summarize oral or written texts;
- evaluate, assess, make judgments and justify standpoints;
- synthesize, create new ideas, predict and draw conclusions.

## 7.2 Listening/Visual interpretation subskills

- Construct meaning from main ideas and supporting details, and draw conclusions from visual texts presented with spoken and/or written text;
- listen effectively & comprehend a lecture, an interview, a filmstrip, etc;
- interpret specific information, ideas, opinions and attitudes, presented in visual texts with spoken and/or written texts.

## 7.3 Speaking Subskills

- Speak appropriately and effectively and exchange opinions or express feelings;
- use transitions to establish connectedness, signal movement from one idea to another, and to clarify relationships among ideas;
- respond fluently and accurately to oral or written. messages.

## 7.4 Writing

- Summarize a paragraph, a short text or a longer passage;
- make a clear argument; Avoid repetition and narrative;
- subdivide long sections;

- Provide evidence for claims; Provides rationale for paper;
- use the stages of writing, namely prewriting, drafting/composing, revising and editing avoids lengthy sentences; (Paragraph and essay).

## 8 Translation

Teaching translation hopes to support student mastery of the lexical repertoire of both English and French; their knowledge of the syntactic systems of both languages, cultural and sensitivity when using French or English at the discourse level. It also hopes to promote fidelity and fluency in using both languages.

As for the translation goals, the course hopes to help the students improve their analytical skills, focus on accuracy and style, improve vocabulary and grammar. The following table summarizes the expected learning outcome and the target translation strategies.

| Targeted skill | Expected learning outcome | Target translation strategies |
|---|---|---|
| Understand context. | Analyze whether the text is technical,cultural, or literary before choosing a technique. | • literal translation & calque introduce basic linguistic patterns;<br>• modulation and equivalence address cultural and emotional subtleties. |
| Balance fidelity and fluency. | Prioritize preserving the meaning and naturalness of the text over rigid adherence to the original words or structure. | Borrowing and equivalence, maintain authenticity while, ensuring readability. |
| Be aware of false friends. | Some borrowed or calqued words can lead to mistranslation due to differences in meaning (e.g., *actuellement* in French means "currently," not "actually"). | Borrowing and literal translation highlight potential pitfalls, fostering critical thinking. |
| Cultural sensitivity. | Be mindful of cultural nuances that may influence the choice of technique. | Modulation, equivalence, and reduction emphasize adapting meaning to the audience. |
| Experiment & revise. | Translators often draft using one technique, then revise to ensure clarity and appropriateness in the target language. | Transposition and reduction encourage trying new approaches and refining through feedback. |

RELECTURE

# 9 Table of Specification for CNC and CNAEM

The Hierarchy of Cognitive Skills: from Knowledge Recall to Creative Synthesis.

## 9.1 The Hierarchy of Cognitive Skills: from Knowledge Recall to Creative Synthesis

| Cognitive Level | Cognitive skills governing the cognitive level |
|---|---|
| (20%) | 1 - Remember : knowledge: recall or retrieve previously learned information.<br>2 - Understand: comprehension: grasp the meaning of information, interpret, and explain ideas. |
| (20%) | 3 - Application: use knowledge and concepts in new situations or contexts. |
| (20%) | 4 - Analysis: break down information into components, examine relationships, & identify patterns. |
| (20%) | 5 - Evaluation: make judgments based on criteria; assess the value or validity of ideas. |
| (20%) | 6-Synthesis: generate new ideas, products, or interpretations. |

| Main Command Terms used | |
|---|---|
| List, define, identify | recall, memorize. |
| Summarize, explain, describe. | infer, interpret |
| Demonstrate, use, illustrate. | apply, solve. |
| Analyze, compare, contrast. | differentiate, categorize. |
| Evaluate, assess, justify. | defend, discuss, critique. |
| Create, design, formulate. | compose, invent. |

## 9.2 Educational Goals: aligning Content, Objectives, and Cognitive Levels

| Content | Sub-Content Area | Area Learning |
|---|---|---|
| Critical Reading | Informational Texts. | • Extract and summarize key information from an article.<br>• Break down information into components, examine relationships, & identify patterns.<br>• Evaluate the credibility of sources in an informational text. |
| | Descriptive | Identify the writer's attitude, mood, or tone in the text. |
| | Expository | Understand the macrostructure of texts and extract relevant information. |
| | Argumentative or Persuasive. | Use knowledge and concepts in new situations or contexts. |
| | Business & Technical Reports. | • Is familiar with the structure, mechanics and format of a technical report;<br>• can detect the tone, purpose & key information in the report. |
| | Literary Analysis. | • Analyze and interpret symbolism in a given passage;<br>• identify themes and literary devices in a short story. |
| mmentary | Commenting on a | • **analyze** and **Interpret** specific information, ideas, opinions |

| | | |
|---|---|---|
| | quote or a picture | and attitudes, presented in **visual** texts;<br>• interpret specific information, ideas, opinions and attitudes, presented in written texts;<br>• make logical **inferences** & **draw conclusions** from **visual** texts: ability to understand and interpret the meaning of the quote or image considering underlying messages or themes;<br>• recognize and comment on the **symbolic meaning** conveyed by **visual elements**;<br>• make **judgments** based on **criteria**; assess the value or **validity** of ideas. Verifying the **accuracy** of information;<br>• considering **Perspectives**: demonstrate empathy by considering different interpretations or reactions;<br>• using an appropriate and respectful **tone**;<br>• **tailor comments** to the specific **audience** and **platform**. |
| **Translation** | Thème/ Version. | • Display familiarity with **translation tools**;<br>• display sensitivity and awareness to the **lexical** and **syntactic** systems of both **English** and **French**;<br>• Transfer of **cultural** or **functional** content.<br>• ability to **adapt** the writing **style** to match the **tone** and **style** of the original text;<br>• ability to solve translation challenges, such as finding **equivalent expressions, dealing with ambiguity**, & addressing **cultural gaps**;<br>• preserve the author's **voice/ intention** in the translated text. |
| | Thème | • **Theme**: creatively **adapt** the **content** while preserving the essence of the original;<br>• **theme**: display a **deep understanding** of the **theme** or topic being addressed in the composition. |
| **Writing Skills** | Argumentative Essay | • construct **logical and coherent arguments**;<br>• provide **evidence** for claims and **rationale** for paper;<br>• formulate a clear and concise **thesis** statement that reflects the main argument;<br>• address **opposing viewpoints** to strengthen the overall argument and provide evidence and reasoning to refute counterarguments;<br>• **persuasive**: write a persuasive essay with a clear thesis statement and supporting evidence;<br>• **persuasive**: utilize persuasive language, rhetoric, and literary devices. |
| | Synthesis Essay | • **Source Integration**: properly cite sources using the appropriate citation style;<br>• **generate** new ideas, products, or interpretations based on different sources;<br>• **identifying Patterns**: recognize patterns, themes, or commonalities across different sources;<br>• **theme Development**: establishing a central theme that connects the various sources;<br>• develop a clear **thesis** that synthesizes information from different sources;<br>• **blending** ideas from different sources into a cohesive and |

| | |
|---|---|
| | unified piece;<br>• ensure smooth **transitions** between different sources and ideas;<br>• provide **original analysis** and interpretation of the synthesized information;<br>• demonstrate a **deep understanding of the topic** beyond a mere summary of sources. |
| Text Organisation | • demonstrate proper use of **transitions** & **sentence structure**. |
| Grammar and Editing. | Identify and correct errors in grammar and punctuation. |