

Royaume du Maroc



Ministère de l'Éducation Nationale,  
du Préscolaire et des Sports

**Classes Préparatoires  
aux Grandes Écoles**

**Programmes de la  
deuxième année TSI**

---

# REFLECTURE

# Avant-propos

---

L'éducation est un pilier essentiel du développement national. Considérée comme la clé de l'innovation et du progrès, elle joue un rôle stratégique dans la préparation des nouvelles générations aux défis du monde moderne. Dans notre système éducatif, les Classes Préparatoires aux Grandes Écoles (CPGE) occupent une place centrale : en dispensant une formation exigeante et rigoureuse, elles préparent les étudiants à accéder aux grandes écoles d'ingénieurs et de management, tout en favorisant leur insertion et leur contribution active au développement du pays.

Les nouveaux programmes des CPGE que nous présentons aujourd'hui sont en accord total avec la Vision Stratégique 2015-2030 et la Loi-Cadre 51-17, qui placent l'éducation au cœur des priorités nationales. Conçue pour renforcer l'excellence académique, cette nouvelle version des programmes a pour finalité la maîtrise approfondie des disciplines de spécialité tout en préparant les étudiants à un monde en perpétuelle mutation. Ainsi, les contenus et les méthodes pédagogiques ont été adaptés en fonction des défis scientifiques et technologiques du monde actuel.

Grâce à cette refonte des programmes, les CPGE accentuent la pertinence et la solidité de la formation dispensée dans les disciplines fondamentales dont la maîtrise représente un atout considérable pour la réussite dans des parcours académiques et professionnels de haut niveau. En plus du développement des compétences scientifiques et techniques, cette formation vise également à développer des aptitudes transversales essentielles, telles que la pensée critique, la créativité et le traitement de problèmes complexes, afin de mieux armer les étudiants face aux enjeux contemporains.

Ces programmes accordent aussi une importance particulière aux aspects humains et culturels de la formation dans la mesure où ils mettent l'accent sur l'ouverture d'esprit, la communication et le plurilinguisme, autant d'éléments clés pour préparer les étudiants à évoluer dans un environnement mondialisé. Cette ouverture leur permet d'élargir leur vision du monde, en même temps qu'elle cultive chez eux des valeurs typiques des citoyens résolus aux défis à l'échelle locale, nationale et internationale.

Une autre caractéristique mise en avant par cette refonte est l'initiation à la recherche scientifique qui occupe une place privilégiée dans le nouveau dispositif. Cette composante a pour rôle d'inciter les étudiants à adopter une attitude dynamique envers le progrès scientifique, les encourageant à jouer un rôle actif dans l'évolution de leurs domaines d'étude et de recherche. Cette dimension revêt une importance particulière dans un monde où la capacité à concevoir des solutions novatrices et à résoudre des problématiques complexes est un avantage déterminant.

Ces programmes ne se limitent donc pas à un simple parcours académique, ils incarnent une ambition éducative audacieuse visant à faire des jeunes d'aujourd'hui les leaders de demain. Ils constituent un véritable tremplin pour l'avenir, préparant les étudiants à contribuer activement à l'émergence et à la compétitivité du Maroc sur la scène internationale. En misant sur une formation alliant excellence académique, innovation et valeurs humaines, nous œuvrons à construire un pays où le progrès et la créativité vont de pair avec l'inclusion sociale et le développement durable.

**MOHAMED SAAD BERRADA**

Ministre de l'Éducation Nationale,  
du Préscolaire et des Sports

# REFLECTURE

# Table des matières

---

<b>MATHÉMATIQUES</b>	<b>1</b>
<b>1 Préambule</b>	<b>1</b>
1.1 Objectifs généraux de formation	1
1.2 Organisation du texte du programme	2
1.3 Contenu du programme	3
1.4 Organisation temporelle de la formation	4
1.5 Recommandations pédagogiques	4
<b>Première période</b>	<b>6</b>
<b>1 Rappels et compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices</b>	<b>6</b>
1.1 Familles dénombrables de vecteurs	6
1.2 Produit et somme d'espaces vectoriels	6
1.3 Projecteurs et symétries	7
1.4 Matrices et endomorphismes	7
<b>2 Déterminants</b>	<b>8</b>
2.1 Déterminants d'une matrice carrée	8
2.2 Déterminants d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme	9
<b>3 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées</b>	<b>9</b>
3.1 Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	9
3.2 Polynôme caractéristique	10
3.3 Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables	10
3.4 Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables	10
3.5 Application de la réduction	11
<b>4 Fonctions vectorielles d'une variable réelle, arcs paramétrés</b>	<b>11</b>
4.1 Dérivation d'une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$	12
4.2 Arcs paramétrés	12
<b>5 Intégration des fonctions continues sur un intervalle</b>	<b>13</b>
5.1 Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ , avec $a \in \mathbb{R}$	13
5.2 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ , avec $a \in \mathbb{R}$	14
5.3 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	14
5.4 Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables	15
<b>6 Séries numériques</b>	<b>15</b>
6.1 Convergence et divergence	15
6.2 Cas des séries à termes positifs	16
6.3 Séries à termes quelconques	16
<b>Seconde période</b>	<b>17</b>
<b>1 Séries entières</b>	<b>17</b>
1.1 Rayon de convergence d'une série entière	18
1.2 Somme d'une série entière d'une variable réelle	18
1.3 Fonctions développables en série entière	19

<b>2</b>	<b>Espaces probabilisés; variables aléatoires réelles; cas discret</b> .....	<b>19</b>
2.1	Révisions et compléments sur les espaces probabilisés .....	20
2.2	Variables aléatoires et lois de variables aléatoires .....	21
2.3	Variables aléatoires discrètes .....	23
2.4	Espérance, moments .....	24
2.5	Fonctions génératrices .....	25
2.6	Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites .....	25
<b>3</b>	<b>Espaces préhilbertiens réels. Endomorphismes des espaces euclidiens</b> .....	<b>26</b>
3.1	Rappels sur les produits scalaires .....	27
3.2	Orthogonalité .....	27
3.3	Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie .....	28
3.4	Matrices orthogonales .....	28
3.5	Isométries vectorielles d'un espace euclidien .....	28
3.6	Isométries vectorielles d'un plan euclidien .....	29
3.7	Isométries d'un espace euclidien de dimension 3 .....	29
3.8	Matrices symétriques réelles .....	30
<b>4</b>	<b>Séries de FOURIER</b> .....	<b>30</b>
4.1	Fonctions définies par morceaux .....	30
4.2	Coefficients et séries de FOURIER .....	31
4.3	Théorèmes de convergence .....	31
<b>5</b>	<b>Équations différentielles linéaires</b> .....	<b>32</b>
5.1	Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2, solutions, structures .....	32
5.2	Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants .....	33
<b>6</b>	<b>Fonctions de plusieurs variables</b> .....	<b>33</b>
6.1	Introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$ .....	34
6.2	Limite et continuité .....	34
6.3	Dérivées partielles, applications de classe $C^k$ sur une partie ouverte, $k = 1$ ou $2$ .....	34
6.4	Équations aux dérivées partielles .....	35
6.5	Extremums d'une fonction de deux variables .....	35
6.6	Applications géométriques des notions précédentes .....	35
<b>7</b>	<b>Variables aléatoires à densité</b> .....	<b>36</b>
7.1	Variables aléatoires à densité .....	36
7.2	Espérance, moments .....	37
7.3	Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites .....	38
<b>PHYSIQUE</b> .....		<b>41</b>
<b>1</b>	<b>Préambule</b> .....	<b>41</b>
1.1	Objectifs de formation en physique .....	41
1.2	Repères pour l'enseignant .....	42
1.3	Communication à l'écrit et à l'oral .....	43
1.4	Évaluation des élèves .....	43
1.5	Organisation des programmes .....	43
<b>Formation expérimentale</b> .....		<b>45</b>
<b>1</b>	<b>Objectifs expérimentaux</b> .....	<b>45</b>
<b>2</b>	<b>Organisation expérimentale</b> .....	<b>46</b>
2.1	Mesures et incertitudes .....	47
2.2	Prévention du risque au laboratoire de physique et de chimie .....	48
2.3	Thèmes de travaux pratiques et objectifs .....	49
<b>3</b>	<b>Électronique</b> .....	<b>49</b>
TP1	Utilisation d'une station d'acquisition et de traitement automatique des données .....	49

	<i>TP2</i> Montages à amplificateur linéaire intégré (intégration, dérivation) . . . . .	49
	<i>TP3</i> Étude d'un filtre passe-bande accordable . . . . .	49
	<i>TP4</i> Effet d'un filtre linéaire sur un signal périodique . . . . .	49
	<i>TP5</i> Analyse spectrale d'un signal électronique . . . . .	49
	<i>TP6</i> Traitement numérique d'un signal, échantillonnage, filtrage numérique . . . . .	50
	<i>TP7</i> Multiplication des signaux. Application à la modulation et la détection synchrone . . . . .	50
	<i>TP8</i> Conversion alternatif-continu . . . . .	50
	<i>TP9</i> Défauts et limitations des ALI réels . . . . .	50
	<i>TP10</i> Oscillateur auto-entretenu quasi sinusoïdal . . . . .	50
	<i>TP11</i> Oscillateurs de relaxation . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Optique</b> . . . . .	<b>51</b>
	<i>TP12</i> Interférence et diffraction des ondes lumineuses . . . . .	51
	<i>TP13</i> Réglage et utilisation d'un spectrogoniomètre, spectroscopie à réseau . . . . .	51
	<i>TP14</i> Polarisation des ondes lumineuses . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Mécanique</b> . . . . .	<b>51</b>
	<i>TP15</i> Étude d'oscillateurs mécaniques : pendule pesant, pendule de torsion . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Thermodynamique</b> . . . . .	<b>52</b>
	<i>TP16</i> Changement d'état d'un corps pur . . . . .	52
	<i>TP17</i> Mesures calorimétriques : mesure d'une capacité thermique et d'une chaleur latente . . . . .	52
	<i>TP18</i> Conduction thermique : étude de la propagation de la chaleur dans des barres métalliques - Détermination d'une conductivité thermique . . . . .	52
	<i>TP19</i> Étude d'une machine thermique cyclique ditherme . . . . .	52
<b>7</b>	<b>Physique des ondes</b> . . . . .	<b>52</b>
	<i>TP20</i> Ondes électromagnétiques centimétriques en propagation libre . . . . .	52
<b>8</b>	<b>Compte-rendu</b> . . . . .	<b>53</b>
	<b>Contenus thématiques</b> . . . . .	<b>54</b>
<b>1</b>	<b>Électrocinétique</b> . . . . .	<b>55</b>
	1.1 Traitement d'un signal périodique par un système linéaire . . . . .	55
	1.2 Étude de quelques oscillateurs électroniques permanents . . . . .	56
	1.3 Électronique numérique . . . . .	56
	1.4 Modulation et démodulation d'amplitude . . . . .	57
<b>2</b>	<b>Mécanique</b> . . . . .	<b>58</b>
	2.1 Mécanique du solide . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Thermodynamique</b> . . . . .	<b>60</b>
	3.1 Diagramme de phase des fluides réels purs . . . . .	61
	3.2 Thermodynamique d'un fluide en écoulement permanent dans une conduite . . . . .	61
	3.3 Transfert d'énergie par conduction thermique . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Électromagnétisme</b> . . . . .	<b>64</b>
	4.1 Formulation locale des lois de l'électromagnétisme en régime statique . . . . .	65
	4.2 Action d'un champ magnétique sur un courant . . . . .	65
	4.3 Induction électromagnétique et conversion électromécanique . . . . .	65
	4.4 Équations de MAXWELL . . . . .	67
	4.5 Énergie électromagnétique . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Physique des ondes</b> . . . . .	<b>68</b>
	5.1 Propagation du champ électromagnétique dans une région sans charges ni courants . . . . .	68
	5.2 Réflexion sous incidence normale d'une onde électromagnétique sur un conducteur parfait . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Optique</b> . . . . .	<b>69</b>
	6.1 Modèle scalaire des ondes lumineuses . . . . .	69
	6.2 Interférences des ondes lumineuses . . . . .	70

6.3	Étude du réseau plan .....	71
<b>Annexes</b>	.....	<b>72</b>
<b>1</b>	Liste du matériels .....	72
<b>2</b>	Outils mathématiques pour la physique .....	73
<b>3</b>	Outils numériques pour la physique .....	75
<b>CHIMIE</b>		<b>79</b>
<b>1</b>	Préambule .....	<b>79</b>
1.1	Objectifs de formation en chimie .....	79
1.2	Repères pour l'enseignant .....	81
<b>2</b>	Communication à l'écrit et à l'oral .....	<b>81</b>
<b>3</b>	Évaluation des élèves .....	<b>81</b>
<b>4</b>	Organisation des programmes .....	<b>82</b>
<b>Formation expérimentale</b>	.....	<b>83</b>
<b>1</b>	Objectifs expérimentale .....	<b>83</b>
<b>2</b>	Organisation expérimentale .....	<b>84</b>
2.1	Mesures et incertitudes .....	85
2.2	Prévention du risque au laboratoire de physique et de chimie .....	86
2.3	Thèmes de travaux pratiques et objectifs .....	87
<b>3</b>	Solutions aqueuses .....	<b>88</b>
TP1	Tracé et exploitation de courbes de titrage redox; détermination expérimentale de potentiels standard .....	88
TP2	Dosage du diiode par les ions thiosulfate, dosage par excès de la vitamine C .....	88
TP3	Diagramme potentiel-pH du fer .....	88
TP4	Détermination expérimentale d'une constante d'équilibre en solution aqueuse .....	88
TP5	Réalisation d'une pile électrochimique. Protection contre la corrosion .....	88
<b>4</b>	Thermodynamique chimique .....	<b>88</b>
TP6	Détermination expérimentale d'une enthalpie de réaction .....	88
<b>5</b>	Compte-rendu .....	<b>89</b>
<b>Contenus thématiques</b>	.....	<b>90</b>
<b>1</b>	Thermodynamique chimique .....	<b>90</b>
1.1	Grandeurs de réaction .....	91
1.2	Équilibres chimiques en systèmes fermés .....	92
1.3	Optimisation d'un procédé chimique .....	93
<b>2</b>	Thermodynamique redox .....	<b>93</b>
2.1	Étude thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction .....	93
2.2	Diagrammes potentiel-pH - Phénomène de corrosion humide .....	94
<b>ANNEXES</b>	.....	<b>95</b>
<b>1</b>	Liste de matériel .....	<b>95</b>
<b>2</b>	Outils mathématiques pour la chimie .....	<b>95</b>
<b>3</b>	Outils numériques pour la chimie .....	<b>96</b>
<b>SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR/GÉNIE ÉLECTRIQUE</b>		<b>99</b>
<b>1</b>	Préambule .....	<b>99</b>
<b>2</b>	Présentation .....	<b>99</b>
2.1	Objectifs de la formation .....	99

2.2	Démarche pédagogique et didactique de l'enseignant.....	100
2.3	Compétences générales de l'ingénieur développées.....	101
2.4	Activités d'enseignement.....	101
2.5	Organisation du programme et volume horaire indicatif.....	102
2.6	Progression.....	102
<b>3</b>	<b>Contenu détaillé du programme.....</b>	<b>102</b>
3.1	Premier trimestre.....	102
3.2	Deuxième trimestre.....	104
3.3	Chaîne d'information.....	105
<b>4</b>	<b>Annexe 1.....</b>	<b>106</b>
4.1	Intelligence artificielle : (I).....	106
<b>5</b>	<b>Annexe 2.....</b>	<b>106</b>
5.1	Intelligence artificielle : (I).....	106
<b>SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR/GÉNIE MÉCANIQUE</b>		<b>109</b>
<b>1</b>	<b>Préambule.....</b>	<b>109</b>
<b>2</b>	<b>Présentation.....</b>	<b>109</b>
2.1	Objectifs de la formation.....	109
2.2	Démarche pédagogique et didactique de l'enseignant.....	110
2.3	Compétences générales de l'ingénieur développées.....	111
2.4	Activités d'enseignement.....	111
2.5	Organisation du programme et volume horaire indicatif.....	112
2.6	Progression.....	112
<b>Contenu détaillé du programme.....</b>		<b>113</b>
<b>1</b>	<b>Premier trimestre.....</b>	<b>113</b>
1.1	Comportement des systèmes (Cas des solides indéformables).....	113
<b>2</b>	<b>Deuxième et troisième trimestre.....</b>	<b>114</b>
2.2	Comportement des systèmes : cas des solides déformables.....	114
2.3	Adéquation produits-matériaux-procédés.....	114
<b>3</b>	<b>ANNEXE : composantes des compétences «expérimenter» et «réaliser».....</b>	<b>116</b>
<b>INFORMATIQUE</b>		<b>117</b>
<b>1</b>	<b>Préambule.....</b>	<b>117</b>
<b>2</b>	<b>Contexte de la nouvelle réforme de l'informatique en C.P.G.E.....</b>	<b>117</b>
<b>3</b>	<b>Objectifs généraux de la formation.....</b>	<b>118</b>
<b>4</b>	<b>Organisation et recommandations pédagogiques.....</b>	<b>118</b>
4.1	Organisation temporelle de la formation.....	118
4.2	Recommandations pédagogiques.....	120
<b>Première période.....</b>		<b>120</b>
<b>1</b>	<b>La complexité algorithmique.....</b>	<b>120</b>
<b>2</b>	<b>Algorithmes de tri.....</b>	<b>121</b>
<b>3</b>	<b>Les arbres binaires.....</b>	<b>121</b>
<b>4</b>	<b>Méthode de Gauss.....</b>	<b>122</b>
<b>5</b>	<b>Interpolation polynomiale de Lagrange.....</b>	<b>122</b>
<b>6</b>	<b>Meta Heuristique.....</b>	<b>123</b>

<b>Deuxième période</b> .....	<b>123</b>
<b>1 Introduction à la théorie des graphes</b> .....	<b>123</b>
<b>2 Introduction à l'intelligence artificielle</b> .....	<b>124</b>
<b>3 Introduction à la théorie des jeux</b> .....	<b>124</b>
<b>4 Les bases de données relationnelles</b> .....	<b>125</b>
 <b>CULTURE ARABE ET TRADUCTION</b>	 <b>127</b>
 <b>FRANÇAIS</b>	 <b>129</b>
<b>1 Littérature et philosophie</b> .....	<b>129</b>
<b>2 La méthodologie</b> .....	<b>129</b>
<b>2.1 Le résumé de texte</b> .....	<b>129</b>
<b>2.2 La dissertation</b> .....	<b>130</b>
<b>2.3 La synthèse de textes</b> .....	<b>130</b>
<b>3 La communication orale</b> .....	<b>130</b>
 <b>ANGLAIS</b>	 <b>133</b>
<b>1 Introductory Statement</b> .....	<b>133</b>
<b>2 Goals and aims</b> .....	<b>133</b>
<b>3 Specific Performance Objectives - Second Year Level</b> .....	<b>133</b>
<b>4 Assessment and Evaluation</b> .....	<b>134</b>
<b>5 Thematic contents – SECOND YEAR</b> .....	<b>134</b>
<b>5.1 Independent Project</b> .....	<b>135</b>
<b>6 Cognitive contents and skills SECOND YEAR</b> .....	<b>136</b>
<b>7 Linguistic skills_SECOND YEAR</b> .....	<b>136</b>
<b>7.1 Critical Reading Subskills</b> .....	<b>137</b>
<b>7.2 Listening/Visual interpretation subskills</b> .....	<b>137</b>
<b>7.3 Speaking Subskills</b> .....	<b>137</b>
<b>7.4 Writing</b> .....	<b>137</b>
<b>8 Translation</b> .....	<b>138</b>
<b>9 Table of Specification for CNC and CNAEM</b> .....	<b>139</b>
<b>9.1 The Hierarchy of Cognitive Skills: from Knowledge Recall to Creative Synthesis</b> ...	<b>139</b>
<b>9.2 Educational Goals: aligning Content, Objectives, and Cognitive Levels</b> .....	<b>139</b>

# Mathématiques

## 1 Préambule

### 1.1 Objectifs généraux de formation

L'enseignement des mathématiques dans la filière Technologie et Sciences Industrielles (TSI) a pour vocation d'apporter les connaissances fondamentales et les savoir-faire indispensables à la formation générale des scientifiques, qu'ils soient ingénieurs, enseignants ou chercheurs. Il développe les aptitudes et les capacités des élèves selon les axes majeurs suivants :

- ◆ l'acquisition de connaissances et la maîtrise de techniques usuelles ;
- ◆ le développement simultané du sens de la rigueur et du goût du concret ;
- ◆ l'éveil de la curiosité intellectuelle et le développement de l'esprit critique, de recherche et de synthèse ;
- ◆ le développement de l'initiative, de l'autonomie et des capacités d'expression et de communication.

Son objectif est double. D'une part, il permet de développer des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques aux mathématiques. D'autre part, il contribue à fournir un langage, des représentations et des méthodes dont les autres disciplines scientifiques étudiées dans ces classes et au-delà, comme la physique, la chimie, l'informatique et les sciences industrielles, sont demandeuses ou utilisatrices.

La réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique constituent des objectifs majeurs. Les élèves doivent connaître les définitions, les énoncés complets des théorèmes figurant au programme ainsi que les démonstrations exigibles et savoir mobiliser leurs connaissances pour l'étude de problèmes.

Il est attendu que la pratique de la démarche et du raisonnement mathématique à travers les notions étudiées dans le cadre de ce programme concourt à la formation de l'esprit des élèves et le développement de leurs compétences : la rigueur du raisonnement, l'esprit critique, l'analyse et le contrôle des hypothèses et des résultats obtenus et leur pertinence au regard du problème posé, le sens de l'observation et celui de la déduction trouvent en mathématiques un champ d'action où ils seront cultivés de manière spécifique. Enfin, l'autonomie et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à exercer les élèves à mobiliser, de façon complémentaire et coordonnée, connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Une vision géométrique des problèmes imprègne l'ensemble du programme de mathématiques car les méthodes de la géométrie et les apports de son langage (figures, représentations graphiques, interprétations géométriques etc.) jouent un rôle capital en algèbre, en analyse et en probabilité, et dans leurs domaines d'intervention.

Pour aider les élèves à effectuer la synthèse des connaissances acquises dans les différents domaines qu'ils ont étudié, il est souhaitable de mettre en lumière les interactions des champs de connaissance. La concertation entre les enseignants par classe, discipline ou cycle peut y contribuer efficacement ; la cohérence et une organisation coordonnée entre les diverses disciplines est fondamentale. Il

importe d'éviter les redondances tout en soulignant les points communs, de limiter les divergences ou ambiguïtés dues à la diversité des points de vue possibles sur un même objet tout en enrichissant l'enseignement par cette même diversité.

Si les mathématiques sont un outil puissant de modélisation, que l'élève doit maîtriser, elles sont parfois plus contraignantes lorsqu'il s'agit d'en extraire une solution. L'évolution des techniques permet désormais d'utiliser aussi l'approche numérique afin de faire porter prioritairement l'attention des élèves sur l'interprétation et la discussion des résultats plutôt que sur une technique d'obtention. Cette approche permet en outre une modélisation plus fine du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires ou l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles. C'est aussi l'occasion pour l'élève d'exploiter les compétences acquises en informatique. C'est enfin l'opportunité de mener avec les professeurs d'informatique d'éventuelles démarches collaboratives.

Dans ce cadre, et vue la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation, les élèves doivent être entraînés à l'utilisation en mathématiques d'un logiciel de calcul scientifique et numérique pour la résolution de problèmes, la formulation de conjectures ou la représentation graphique de résultats. L'utilisation de ce logiciel, en libérant les élèves des aspects calculatoires ou techniques (calcul, dessin, représentation graphique), leur permet de se concentrer sur la démarche. Les concepts mathématiques sous-jacents sont mis en avant et l'interprétation des résultats obtenus est facilitée. L'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles devient possible.

Concernant les capacités d'expression et de communication, cela suppose, à l'écrit, la capacité de comprendre les énoncés mathématiques, de mettre au point un raisonnement et de rédiger une démonstration et, à l'oral, celle de présenter de manière claire et synthétique une démarche ou une production mathématique. Les travaux individuels ou en équipe proposés aux élèves en dehors du temps d'enseignement (devoirs libres, interrogations orales, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales, exposés) contribuent de manière efficace à développer ces compétences. La communication utilise des moyens diversifiés auxquels il convient de familiariser les élèves : cela concerne non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément essentiel, mais aussi les dispositifs de projection appropriés (rétroprojecteur, vidéoprojecteur) et l'outil informatique.

On attachera une importance à l'aspect géométrique des notions et propriétés étudiées en ayant régulièrement recours à des figures et croquis, ce qui permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

## 1.2 Organisation du texte du programme

Le programme de la classe de deuxième année TSI est présenté en deux grandes parties, chacune d'elles correspondant à une période. Chacune de ces parties définit un corpus de connaissances requises et de capacités attendues.

Le programme définit les objectifs de l'enseignement et décrit les connaissances et les capacités exigibles des élèves ; il précise aussi certains points de terminologie, certaines notations ainsi que des limites à respecter. À l'intérieur de chaque période, le programme est décliné en sections (numérotées 1, 2, ...). Chaque section comporte un bandeau et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme et à droite les commentaires.

- ◆ le bandeau définit les objectifs essentiels, précise les capacités attendues des élèves et délimite le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives. Il décrit parfois sommairement les notions qui y sont étudiées ;
- ◆ les contenus fixent les connaissances, les résultats et les méthodes figurant au programme ;
- ◆ les commentaires donnent des informations sur les capacités attendues des élèves. Ils indiquent des repères et proposent des notations. Ils précisent le sens ou les limites de certaines notions ; les énoncés de certaines définitions ou de certains résultats sont parfois intégralement explicités,

l'objectif étant ici d'unifier les pratiques des enseignants.

La chronologie retenue dans la présentation des différentes sections de chaque période ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression. Cependant, la progression retenue par chaque professeur au cours de chaque période doit respecter les objectifs de l'enseignement dispensé au cours de cette période.

### 1.3 Contenu du programme

Le programme définit un corpus de connaissances requises et de capacités attendues, et explicite des aptitudes et des compétences qu'une activité mathématique bien conçue est amenée à développer. L'acquisition de ce socle par les élèves constitue un objectif prioritaire pour le professeur.

Il permet à tous les élèves d'acquérir progressivement le niveau requis pour la poursuite des enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études dans différents établissements de l'enseignement supérieur ; il leur permet également de se réorienter et de se former tout au long de leur parcours.

Le programme porte essentiellement sur l'algèbre linéaire et préhilbertienne, l'analyse et les probabilités. Son étude permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, et d'établir des liens avec d'autres disciplines.

Le programme d'algèbre comprend deux volets. Le premier prolonge l'étude de l'algèbre linéaire abordée en première année, introduit la notion de déterminant et aboutit à la théorie de la réduction dont il formule les principaux résultats en termes d'éléments propres et de polynôme caractéristique, et développe quelques applications. Le second, consacré à l'algèbre euclidienne, met l'accent sur les relations entre les points de vue matriciel et géométrique, notamment à travers l'étude des isométries vectorielles en dimensions deux et trois. La réduction des matrices symétriques réelles permet de faire le lien entre ces deux volets.

Le programme d'analyse est introduit par l'étude des fonctions vectorielles d'une variable réelle qui s'attache à relier les registres analytique et géométrique en développant l'étude affine des arcs paramétrés. L'étude de l'intégration, entamée en première année dans le cadre des fonctions continues sur un segment, se poursuit dans celui des mêmes fonctions sur un intervalle quelconque et aboutit à l'introduction de la notion de fonction intégrable.

L'étude des séries numériques a pour objectif la détermination de la nature d'une série par comparaison avec les séries de référence et la maîtrise de la convergence absolue. Cette section est étudiée notamment pour son intérêt dans l'étude des variables aléatoires discrètes ; il constitue aussi une introduction à l'étude des séries entières et des séries de FOURIER. En étroite articulation avec les concepts propres aux sciences physiques et aux sciences industrielles, l'étude des séries de FOURIER valorise les interprétations en termes de signaux.

L'étude des équations et des systèmes différentiels linéaires, dont les interventions sont fréquentes tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques, est basée sur le théorème de Cauchy qui permet d'établir la structure de l'ensemble des solutions, illustrant la pertinence des outils de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes de l'analyse. Le cas particulier où les coefficients sont constants permet de mettre en œuvre des techniques de réduction matricielle. Dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients continus, la recherche de solutions sous la forme de sommes de séries entières établit un lien entre deux parties importantes du programme d'analyse.

La section relative au calcul différentiel à plusieurs variables est limitée au cas des fonctions numériques de deux ou trois variables réelles. Elle fournit des méthodes et des outils opérationnels pour résoudre des problèmes pouvant être issus d'autres disciplines scientifiques (recherche d'extremums, équations aux dérivées partielles). Elle comporte aussi un paragraphe présentant les premières notions de géométrie différentielle et favorise ainsi les interprétations et visualisations géométriques.

L'enseignement des probabilités permet d'illustrer certains résultats d'analyse et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste ; il fournit un modèle mathématique prenant en compte l'aspect aléatoire d'un phénomène. Il permet ainsi d'aborder des situations réelles où le hasard intervient.

Cet enseignement présente brièvement le formalisme de KOLMOGOROV qui sera repris et approfondi dans le cursus post classes préparatoires. Son objectif majeur est l'étude des variables aléatoires discrètes et celle des variables à densité, ce qui permet d'élargir le champ des situations réelles se prêtant à une modélisation probabiliste.

On y étudie les bases de la théorie des probabilités : variables aléatoires, lois usuelles, notions d'indépendance et de probabilités conditionnelles, notions de moments et de fonctions génératrices ; cette partie débouche sur des résultats d'approximation (loi faible des grands nombres, théorème de la limite centrée). La loi faible des grands nombres permet de justifier a posteriori l'approche fréquentiste d'une probabilité pour un schéma de Bernoulli. L'inégalité qui la sous-tend (inégalité de Bienaymé-Tchebychev) précise la vitesse de convergence de cette approximation et valide l'interprétation de la variance comme indicateur de dispersion. Cette partie a vocation à interagir avec le reste du programme, notamment en exploitant les séries génératrices et l'intégration sur un intervalle quelconque.

Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces préhilbertiens, les fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , et le calcul différentiel.

Le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels) ; il intègre la construction et la mise en forme d'algorithmes et, sur des exemples, la comparaison de leurs performances.

#### 1.4 Organisation temporelle de la formation

Le programme de la classe de deuxième année TSI est présenté en deux grandes parties, chacune d'elles correspondant à une période. Le programme de la première période est étudié complètement en premier lieu, lors des quatre premiers mois de l'année ; celui de la deuxième période est ensuite abordé. Le programme doit être traité en veillant à alterner, de préférence, des sections d'analyse et de probabilité d'une part et d'algèbre et de géométrie euclidienne de l'autre.

#### 1.5 Recommandations pédagogiques

Ce programme propose divers types d'activités dont les unes mettent en œuvre des techniques classiques et bien délimitées qui doivent être maîtrisées par les élèves, les autres visent à développer un savoir-faire ou à illustrer une idée, et avec lesquelles les élèves doivent acquérir une certaine familiarité. Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main de ces techniques classiques dont la maîtrise s'acquiert notamment grâce à des exercices et à des problèmes que les élèves doivent in fine être capables de résoudre par eux-mêmes.

Les développements formels ou trop abstraits doivent être évités ; une place importante doit être faite aux applications, exercices, problèmes, en relation chaque fois que cela est possible avec les enseignements de physique, de chimie, des sciences industrielles et d'informatique. Il faut éviter autant les situations artificielles que les exercices de pure virtuosité technique.

Les interactions entre les différentes parties du programme sont fortes et méritent d'être soulignées, de même que les liens avec d'autres disciplines, permettant ainsi de mettre en évidence la spécificité et la valeur de la démarche mathématique. Quelques repères historiques, permettant d'analyser l'interaction entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, pourront être fournis aux élèves pour mettre en valeur la dimension et le contenu culturels des mathématiques.

L'évolution des matériels et logiciels conduit à renforcer la partie réservée à l'algorithmique. En effet, ces moyens de calcul permettent aux mathématiques de disposer d'un lien vivant à l'expérimentation. Ainsi, on présentera de préférence, lorsque cela est possible, des méthodes constructives

accompagnées de la description d'un algorithme plutôt que des démonstrations d'existence ou de convergence démunies de procédé de construction. La présentation des algorithmes s'entend sur deux niveaux. D'une part, ils peuvent être présentés sous une forme logique abrégée, sans référence obligatoire à un langage informatique particulier ; d'autre part, ils sont destinés à être mis en œuvre sur machine à l'occasion des heures passées en salle d'informatique sous forme de travaux pratiques.

Le programme est présenté en deux grandes parties, mais son organisation n'est pas un plan de cours ; il va de soi que cette présentation n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre les différents domaines des mathématiques.

Les sections qui composent le programme suivent un ordre thématique qui n'est d'ailleurs pas le seul possible. Cette organisation a pour objet de présenter les différentes notions du programme de mathématiques et ne peut en aucun cas être considéré comme une progression de cours.

Chaque professeur adopte librement la progression qu'il juge adaptée au niveau de sa classe et conduit l'organisation de son enseignement dans le respect de la cohérence de la formation globale et en privilégiant la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution ; de même et afin de faciliter l'organisation du travail des élèves et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les disciplines scientifiques et technologiques.

Le professeur choisit ses méthodes et ses problématiques en privilégiant la mise en activité<sup>1</sup> effective des élèves et en évitant tout dogmatisme, et ce quel que soit le temps d'enseignement proposé (cours, travaux dirigés, ...). En effet, l'acquisition des connaissances et le développement des capacités et des compétences sont d'autant plus efficaces que les élèves sont acteurs de leur formation. Le contexte d'enseignement retenu et les supports pédagogiques utilisés doivent motiver les élèves et favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie de ces derniers. Les situations de résolution de problèmes, de la modélisation jusqu'à la présentation des résultats en passant par la démarche de résolution proprement dite, favorisent cette mise en activité.

En contrepartie de cette liberté dans l'organisation de la progression, le respect des **objectifs de formation et son étalement dans l'année**, comme indiqués ci-dessus, reste une nécessité incontournable.

---

1. "Tell me and I forget, teach me and I may remember, involve me and I learn." BENJAMIN FRANKLIN (« Dis-moi et j'oublie, enseigne-moi et je peux me rappeler, implique-moi et j'apprends. »)

# Première période

## 1 Rappels et compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

Cette section a un triple objectif :

- ◆ consolider et approfondir les acquis de la classe de première année TSI relatifs à l'étude des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire notamment en dimension finie ;
- ◆ étudier de nouveaux concepts : somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels, projecteurs et symétries, sous-espaces stables, trace, transposée, polynômes de matrice ;
- ◆ exploiter les articulations entre le point de vue géométrique et le point de vue matriciel, et les apports du passage d'un point de vue à un autre.

Le programme valorise les interprétations et les illustrations géométriques des notions et des résultats étudiés, ce qui permet de développer une visualisation des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition. On attachera ici une importance à cet aspect en ayant recours à de nombreuses figures.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- ◆ maîtrisent l'algèbre linéaire en dimension finie et, notamment, l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et applications linéaires) et le point de vue matriciel ;
- ◆ soient capables d'exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre (systèmes linéaires, polynômes, interpolation, équations aux différences finies), de l'analyse (récurrences linéaires et équations différentielles linéaires) et de la géométrie.

Dans cette section,  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel où le corps de base  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 1.1 Familles dénombrables de vecteurs

Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs  $(x_i)_{i \in I}$  d'un espace vectoriel  $E$ , indexée par un ensemble dénombrable  $I$ . Famille libre, famille génératrice, base.

Extension des résultats vus en première année sur les familles finies.

Base canonique de  $\mathbb{K}[X]$ . Toute famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés est libre.

En particulier, toute famille  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , où  $\deg(P_k) = k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , est une base de  $\mathbb{K}[X]$ .

### 1.2 Produit et somme d'espaces vectoriels

Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.

Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels ; famille finie de sous-espaces vectoriels en somme directe ; sous-espaces supplémentaires.

Par définition, la somme  $F = F_1 + \dots + F_r$  de  $r$  sous-espaces est directe si tout vecteur  $x$  de  $F$  se décompose de manière unique sous la forme  $x = \sum_{i=1}^r x_i$  où  $x_i \in F_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ .

Caractérisation d'une somme directe par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.

Base d'un espace vectoriel  $E$ , de dimension finie, adaptée à une décomposition en somme directe  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$  d'une famille finie  $F_1, \dots, F_r$  de sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie  $n$  défini comme sous-espace de dimension  $n - 1$ .

Équations d'un hyperplan.

Caractérisation comme sous-espace admettant une droite comme supplémentaire.

Pour  $r \geq 3$ , toute autre caractérisation est hors programme.

Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base.

Interprétation géométrique : droites et plans en dimension deux et trois.

### 1.3 Projecteurs et symétries

Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. Matrice dans une base adaptée. Caractérisation par les relations  $p \circ p = p$  et  $s \circ s = id_E$ .

Détermination des éléments caractéristiques d'un projecteur, d'une symétrie.

### 1.4 Matrices et endomorphismes

Matrice symétrique, antisymétrique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Décomposition d'une matrice carrée comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Matrices semblables. Interprétation en termes d'endomorphisme. Si  $A$  et  $B$  sont semblables, alors il en est de même de leurs puissances.

Trace d'une matrice carrée; linéarité de la trace, trace d'une transposée, relation  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

Invariance de la trace par similitude.

Trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie; la trace d'un projecteur est égale à son rang.

Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).

Sous-espace  $F$  stable par un endomorphisme  $u$  de  $E$ ; endomorphisme  $u_F$  de  $F$  induit par  $u$ .

Matrice de  $u$  dans une base adaptée à  $F$ .

Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.

Si deux endomorphismes  $u$  et  $v$  commutent,  $\text{Ker } u$  et  $\mathfrak{I}u$  sont stables par  $v$ .

Polynôme de matrice.

Notations  $\mathcal{S}_n(K)$ ,  $\mathcal{A}_n(K)$ .

$\mathcal{S}_n(K)$  et  $\mathcal{A}_n(K)$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(K)$ .

Les élèves doivent savoir utiliser l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée.

La notion de matrices équivalentes et l'étude des classes de similitude sont hors programme

Deux matrices carrées semblables ont la même trace.

La démonstration concernant le produit par blocs n'est pas exigible.

Les élèves doivent savoir interpréter une forme matricielle par blocs en termes de sous-espace stable, et inversement.

On peut notamment s'appuyer sur les exemples des projecteurs et symétries, déjà étudiés en première année TSI.

Exploitation d'un polynôme annulateur pour étudier l'inversibilité d'une matrice et, le cas échéant, de calculer son inverse.

## 2 Déterminants

Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre  $n$  est introduit de manière récursive par le biais du développement par rapport à une ligne ou une colonne. On étudie ensuite le déterminant d'une famille de  $n$  vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension  $n$  et le déterminant d'un endomorphisme. Cette section met en évidence l'aspect algébrique (caractérisation des matrices inversibles) et l'aspect géométrique (aire et volume orientés).

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- ◆ connaissent les propriétés des déterminants ;
- ◆ puissent utiliser ces propriétés pour effectuer des calculs simples via des opérations élémentaires.

Le corps de base  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 2.1 Déterminants d'une matrice carrée

Existence et caractérisation du déterminant : pour tout  $n \geq 1$ , il existe une unique application  $f_n : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  vérifiant les trois propriétés suivantes :

- $f_n$  est linéaire par rapport à chacune des lignes de sa variable ;
- pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $f_n(A) = 0$  si  $\text{rg}(A) < n$  ;
- $f_n(I_n) = 1$ .

Déterminant et opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice :

- Si la matrice  $A'$  est obtenue à partir de la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  en échangeant deux de ses lignes, alors  $\det(A') = -\det(A)$ .
- Si la matrice  $A'$  est obtenue à partir de la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  en multipliant une de ses lignes par  $\lambda$ , alors  $\det(A') = \lambda \det(A)$ .
- Si la matrice  $A'$  est obtenue à partir de la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  en ajoutant à l'une de ses lignes une combinaison linéaire des autres, alors  $\det(A') = \det(A)$ .

Développement de LAPLACE suivant la  $j^{\text{ème}}$  colonne : si  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

où pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ ,  $A_{i,j}$  désigne la sous-matrice de  $A$  obtenue en supprimant sa  $i^{\text{ème}}$  ligne et sa  $j^{\text{ème}}$  colonne.

Multiplicativité du déterminant. Invariance par transposition des matrices ; développement de LAPLACE suivant une ligne ; expression du déterminant d'une matrice triangulaire inférieure.

Déterminant de l'inverse d'une matrice inversible. Caractérisation des matrices inversibles.

Ce résultat est admis pour  $n \geq 4$ . On notera  $\det_n(A)$  ou simplement  $\det(A)$  le nombre  $f_n(A)$  pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On motivera géométriquement cette définition pour  $n \in \{2, 3\}$  par les notions d'aire et de volume algébriques.

Relation  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ .

Les élèves doivent savoir calculer un déterminant par opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes.

Ces formules permettent de justifier l'existence de  $\det_n$  en faisant une récurrence sur  $n$ .

Applications : expression du déterminant d'une matrice d'ordre 2 ou 3, d'une matrice triangulaire supérieure.

$\det(AB) = \det(A) \det(B)$ ,  $\det(A) = \det(A^T)$  pour  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible si, et seulement si,  $\det(A) \neq 0$ .

Formules de CRAMER.

## 2.2 Déterminants d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme

Dans un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n \geq 1$ , déterminant d'une famille  $(x_1, \dots, x_n)$  de vecteurs dans une base  $e$  de  $E$ . La famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est une base si, et seulement si,  $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ .

Déterminant d'un endomorphisme ; déterminant d'une composée. Caractérisation des automorphismes.

Notation  $\det_e(x_1, \dots, x_n)$ .

Dans  $\mathbb{R}^2$  (resp.  $\mathbb{R}^3$ ), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallépipède).

Le déterminant d'un endomorphisme est défini comme étant le déterminant de sa matrice dans une base ; indépendance du choix de la base.

Traduction sur les déterminants d'endomorphismes des propriétés vues sur les déterminants de matrices.

## 3 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Cette section a un double objectif :

- ◆ approfondir les notions étudiées en première année TSI et étudier la réduction des endomorphismes et des matrices ;
- ◆ exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- ◆ acquièrent les notions de base sur la réduction des endomorphismes et des matrices (éléments propres, droite stable, critères de réduction reposant sur les sous-espaces propres ou le polynôme caractéristique) ;
- ◆ puissent mettre en œuvre ces notions pour mener l'étude, dans des cas standard, de la diagonalisation et de la trigonalisation des matrices et des endomorphismes, en dimension finie ;
- ◆ soient capables d'exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse (recherche des solutions d'une récurrence linéaire à coefficients constants, étude et résolution d'équations différentielles linéaires) et de la géométrie (étude des isométries et réduction des matrices symétriques réelles).

Tout développement sur les polynômes d'endomorphisme ou de matrice est hors programme. Le théorème de Cayley-Hamilton est hors programme.

Dans cette section,  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel où le corps de base  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 3.1 Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre.

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres.

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres, associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, est directe.

Un vecteur propre est non nul.

Les élèves doivent savoir que si deux endomorphismes  $u$  et  $v$  commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

Notation  $\text{Sp}(u)$ . La notion de valeur spectrale est hors programme.

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie  $n$  est fini de cardinal au plus  $n$ .

Si  $P$  est un polynôme annulateur de  $u$ , toute valeur propre de  $u$  est racine de  $P$ .

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée  $M$ .

Lien entre éléments propres d'un endomorphisme et ceux de sa matrice dans une base donnée.

Si  $u(x) = \lambda x$ , alors  $P(u)(x) = P(\lambda)x$ , pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

Cas d'un projecteur ou d'une symétrie.

Extension des définitions et de ces résultats aux matrices.

Équation aux éléments propres  $MX = \lambda X$ .

Deux matrices semblables ont même spectre.

### 3.2 Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée  $A$ , d'un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel de dimension finie.

Une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique ; le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.

Les racines du polynôme caractéristique dans le corps de base sont les valeurs propres. Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.

Notations  $\chi_u, \chi_A$ .

Le polynôme  $\chi_u$ , défini par la fonction polynomiale  $\lambda \mapsto \chi_u(\lambda) = \det(\lambda \text{id}_E - u)$ , est unitaire ; valeurs des coefficients des monômes de degrés 0 et  $n - 1$  dans  $\chi_u, \chi_A$ .

Le sous-espace propre associé à une valeur propre  $\lambda$  est de dimension inférieure ou égale à la multiplicité de  $\lambda$ .

### 3.3 Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

*Dans la pratique des cas numériques, on se limite à  $n = 2$  ou  $n = 3$ .*

Un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de  $E$  dans laquelle sa matrice est diagonale.

Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à  $E$ .

Pour qu'un endomorphisme  $u$  soit diagonalisable, il faut et il suffit que  $\chi_u$  soit scindé sur le corps de base  $\mathbb{K}$  et que, pour toute valeur propre de  $u$ , la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité (comme racine de  $\chi_u$ ).

Un endomorphisme d'un espace de dimension  $n$  admettant  $n$  valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Une telle base est constituée de vecteurs propres.

Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé soit diagonalisable.

Traduction matricielle.

Les projecteurs et les symétries sont des endomorphismes diagonalisables.

Traduction matricielle.

Traduction matricielle.

### 3.4 Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Un endomorphisme est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limitera dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.

Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé sur le corps de base  $\mathbb{K}$ .

En particulier, tout endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  sont trigonalisables.

Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.

Pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit.

Démonstration hors programme.

Interprétation dans le registre matriciel.

Si le polynôme caractéristique  $\chi_u$  (resp.  $\chi_A$ ) est scindé, la somme et le produit des valeurs propres de  $u$  (resp.  $A$ ), comptées avec leur multiplicité, sont respectivement égaux à la trace et au déterminant de  $u$  (resp.  $A$ ).

### 3.5 Application de la réduction

Si  $A = PBP^{-1}$ , formule  $A^n = PB^nP^{-1}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.

Application aux récurrences vectorielles d'ordre 1 de la forme  $X_{n+1} = AX_n$ .

Récurrence linéaire à coefficients constants : structure de l'ensemble des solutions dans le cas homogène.

Cas d'une récurrence linéaire homogène d'ordre 2, à coefficients constants : équation caractéristique, base de solutions.

Les élèves peuvent utiliser librement l'expression de  $D^n$  pour  $D$  diagonale.

Les élèves peuvent utiliser librement la relation  $X_n = A^n X_0$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Les élèves doivent savoir traduire matriciellement une relation de récurrence linéaire.

Les élèves doivent connaître la forme des solutions, à l'aide de la résolution de l'équation caractéristique.

## 4 Fonctions vectorielles d'une variable réelle, arcs paramétrés

Cette section poursuit trois objectifs :

- ◆ consolider les acquis de première année TSI concernant la dérivation des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes et étendre ces résultats au cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \leq 3$  ;
- ◆ formaliser des notions géométriques (arc paramétré, tangente) et cinématiques (vitesse, accélération) rencontrées dans d'autres disciplines scientifiques ;
- ◆ fournir des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et le calcul différentiel.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- ◆ connaissent et sachent exploiter l'interprétation cinématique et graphique de la notion de dérivée en un point ;
- ◆ soient capables de mener l'étude de fonctions d'une variable réelle à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  et en particulier d'en établir les propriétés liées à la continuité, à la dérivabilité et à la classe  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  ;
- ◆ sachent déterminer la tangente et la normale à un arc paramétré plan en un point, et soient capables d'en calculer la longueur.

Les fonctions étudiées ici sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , avec  $2 \leq n \leq 3$ .

## 4.1 Dérivation d'une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Continuité et dérivabilité d'une fonction en un point. Expression des composantes de la dérivée en un point. Dérivabilité à droite et à gauche.

Ces notions sont définies à l'aide des fonctions coordonnées.

Interprétation géométrique.

Interprétation cinématique, vitesse instantanée.

Dérivabilité sur un intervalle, application dérivée.

Combinaison linéaire de fonctions dérivables, linéarité de la dérivation.

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'.$$

Dérivabilité et dérivée d'une application de la forme  $L \circ f$  où  $L$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ ,  $p \leq 3$ .

$$(L \circ f)' = L \circ f'.$$

Dérivabilité et dérivée d'une application de la forme  $B(f, g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$  où  $B$  est une application bilinéaire ; cas du produit d'une fonction à valeurs réelles et d'une fonction à valeurs vectorielles, cas du produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$ , du produit mixte et du carré de la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ .

La dérivée de  $t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle$  est l'application  $t \mapsto \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle$ , celle de  $t \mapsto \|f(t)\|^2$  est  $t \mapsto 2\langle f'(t), f(t) \rangle$ .

Dérivation d'un déterminant et d'un produit vectoriel.

Dérivabilité et dérivée de  $f \circ \varphi$  où  $\varphi$  est une fonction réelle de variable réelle et  $f$  une fonction vectorielle.

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi).$$

Applications  $k$  fois dérivables, de classe  $C^k$ , de classe  $C^\infty$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) sur un intervalle.

Interprétation cinématique de la dérivée seconde, accélération.

Formule de Leibniz.

Dérivée  $k$ -ième du produit d'une fonction à valeurs vectorielles de classe  $C^k$  par une fonction à valeurs réelles de classe  $C^k$  ; cas d'un produit scalaire et d'un produit vectoriel de deux fonctions vectorielles de classe  $C^k$ .

Opérations algébriques sur les applications de classe  $C^k$ .

Espace vectoriel  $C^k(I, \mathbb{R}^n)$  des applications de classe  $C^k$  sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , algèbre  $C^k(I)$  des fonctions de classe  $C^k$  sur  $I$  à valeurs réelles ou complexes,  $0 \leq k \leq +\infty$ .

La composée  $f \circ \varphi$  d'une application  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  sur  $I$  et d'une application  $\varphi$  de classe  $C^k$  sur un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $I$  est de classe  $C^k$  sur  $J$ .

Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe  $C^k$ . Développement limité d'une fonction de classe  $C^k$ .

## 4.2 Arcs paramétrés

Arc paramétré (ou courbe paramétrée) de classe  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Support de l'arc (ou courbe associée). Multiplicité d'un point du support.

Tangente en un point.

La tangente en un point est définie comme la limite des sécantes.

Caractérisation de la tangente à partir du premier vecteur dérivé non nul.

L'étude locale en un point où tous les vecteurs dérivés successifs sont nuls est hors programme.

Paramètre régulier. Tangente en un point associé à un paramètre régulier ; normale à un arc paramétré plan en un point associé à un paramètre régulier.

Point stationnaire.

Position relative locale de la courbe par rapport à sa tangente. Cas particulier d'un point birégulier.

Exemples de construction d'arcs plans.

Interprétation cinématique des dérivées d'ordre 1 et 2.

Points d'inflexion et de rebroussement.

Les élèves doivent savoir utiliser les développements limités de chacune des composantes.

Les élèves doivent savoir exploiter les éventuelles propriétés des fonctions (parité, périodicité) afin de restreindre le domaine d'étude.

Il doivent également savoir utiliser des développements limités pour déterminer, sur des exemples, l'allure de la courbe au voisinage d'un point ainsi que des développements asymptotiques pour étudier les branches infinies.

Les notions d'abscisse curviligne et de paramétrage admissible sont hors programme.

Longueur d'un arc paramétré de classe  $C^1$ .

## 5 Intégration des fonctions continues sur un intervalle

L'objectif de cette section est de définir, dans le cadre restreint des fonctions continues, les notions d'intégrale convergente et d'intégrabilité sur un intervalle quelconque. On soulignera l'importance du principe de comparaison pour ramener l'étude de l'intégrabilité d'une fonction à l'estimation de son comportement aux bornes de l'intervalle d'intégration.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves :

- ◆ sachent établir la convergence ou la divergence d'une intégrale dans des cas standard et en particulier soient capables de comparer une fonction positive aux fonctions de référence ;
- ◆ aient mis en œuvre les techniques d'intégration usuelles pour étudier ou calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle quelconque.

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des énoncés.

Les fonctions considérées ici sont à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , corps des nombres réels ou celui des nombres complexes.

### 5.1 Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ , avec $a \in \mathbb{R}$

Intégrale généralisée (ou « impropre ») convergente : soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{K}$  continue ; l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f$  est dite convergente si la fonction  $x \mapsto \int_a^x f$  admet une limite dans  $\mathbb{K}$  en  $+\infty$ .

Si  $f$  est continue sur  $[a, +\infty[$  et à valeurs positives, alors l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f$  converge si, et seulement si, la fonction  $x \mapsto \int_a^x f$  est majorée.

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $[a, +\infty[$  telles que  $0 \leq f \leq g$ , alors la convergence de  $\int_a^{+\infty} g$  implique celle de  $\int_a^{+\infty} f$ .

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , nature de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ .

Notation : en cas de convergence,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f$  se note  $\int_a^{+\infty} f$  ou  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ , et on dit que l'intégrale est convergente en  $+\infty$ .

Si l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f$  est convergente et  $f$  est continue, dérivation sur  $[a, +\infty[$  de  $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ .

Écriture  $\int_a^{+\infty} f = +\infty$  en cas de divergence.

Le résultat s'applique en particulier si  $f(x) = O(g(x))$  ou si  $f(x) = o(g(x))$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

Intégrale de RIEMANN.

Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , nature de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ .

### 5.2 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ , avec $a \in \mathbb{R}$

Une fonction  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{K}$  est dite intégrable sur  $[a, +\infty[$  si elle est continue sur  $[a, +\infty[$  et si  $\int_a^{+\infty} |f|$  converge.

Pour  $f$  de signe constant,  $\int_a^{+\infty} f$  converge si, et seulement si,  $f$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ .

Si  $f$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ , alors  $\int_a^{+\infty} f$  converge.

**Théorème de comparaison :** pour  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $[a, +\infty[$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$  :

- si  $f(x) = O_{+\infty}(g(x))$ , alors l'intégrabilité de  $g$  sur  $[a, +\infty[$  implique celle de  $f$  ;
- si  $|f(x)| \sim_{+\infty} |g(x)|$ , alors l'intégrabilité de  $g$  sur  $[a, +\infty[$  équivaut à celle de  $f$ .

On utilise indifféremment les expressions «  $f$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$  » et « l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f$  converge absolument ».

Un calcul montrant que  $\int_a^{+\infty} |f| < +\infty$  vaut preuve d'intégrabilité.

Fonction intégrable en  $+\infty$ . L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.

Le résultat s'applique en particulier si  $f(x) = o_{+\infty}(g(x))$ .

Le résultat s'applique en particulier si  $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$ .

### 5.3 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Intégrale généralisée d'une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert (ou ouvert)  $I$  de  $\mathbb{R}$ , dont les extrémités inférieure et supérieure (dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ) sont notées  $a$  et  $b$  respectivement.

Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , dont les extrémités inférieure et supérieure (dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ) sont notées  $a$  et  $b$  respectivement, linéarité de l'application

$$f \mapsto \int_a^b f,$$

définie sur l'espace vectoriel des fonctions continue de  $I$  dans  $\mathbb{K}$  dont l'intégrale converge.

Positivité et croissance dans le cas où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Relation de CHASLES.

Intégration par parties sur un intervalle quelconque :

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

Formule de changement de variable dans une intégrale sur un intervalle quelconque : étant données une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I$  et une fonction  $\varphi$  bijective et de classe  $C^1$  d'un

Notations  $\int_a^b f, \int_a^b f(t) dt$ .

Intégrale convergente (resp. divergente) en  $b$ , en  $a$ .

Écriture  $\int_a^b f = +\infty$  si  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  et d'intégrale divergente.

Pour une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence.

L'existence de deux des trois termes apparaissant dans la formule justifie le calcul.

Dans la pratique, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité de  $f$  et  $g$ .

On considère sur quelques exemples l'utilisation de la formule d'intégration par parties pour ramener l'étude de la convergence d'une l'intégrale à celle d'une intégrale absolument convergente.

Les élèves peuvent appliquer ce résultat sans justification dans des cas de changement de variable usuels (fonctions affine, puissance, exponentielle, logarithme, ...).

intervalle  $J$  sur l'intervalle  $I$ , les intégrales  $\int_I f$  et  $\int_J (f \circ \varphi) |\varphi'|$  sont de même nature et sont égales en cas de convergence.

### 5.4 Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente.

La convergence absolue implique la convergence.

Fonction intégrable sur un intervalle  $I$  : une fonction est dite intégrable sur l'intervalle  $I$  si elle y est continue et si son intégrale sur  $I$  est absolument convergente.

Relation de CHASLES.

Espace vectoriel  $L^1(I, \mathbb{K})$  des fonctions intégrables de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .

Inégalité triangulaire.

Si  $f$  est continue et intégrable sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , et si  $\int_I f = 0$ , alors  $f$  est identiquement nulle.

Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque.

Étude de l'intégrabilité sur  $]0, 1]$  des fonctions de référence usuelles :  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto |\ln x|$ .

On utilise indifféremment les expressions «  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$  » et « l'intégrale  $\int_a^b f$  converge absolument ».

Fonction intégrable en  $b$ , en  $a$ .

$f$  est intégrable sur  $I$  si, et seulement si, pour tout  $c \in I$ ,  $f$  est simultanément intégrable sur  $I \cap [c, +\infty[$  et  $I \cap ]-\infty, c]$  et dans ce cas

$$\int_I f = \int_{I \cap ]-\infty, c]} f + \int_{I \cap [c, +\infty[} f.$$

Pour  $f \in L^1(I, \mathbb{K})$ , notation  $\int_I f, \int_I f(t) dt$ .

$$|\int_I f| \leq \int_I |f|.$$

La fonction  $f$  est intégrable en  $a^+$  (resp.  $b^-$ ) si, et seulement si, la fonction  $t \mapsto f(a+t)$  (resp.  $t \mapsto f(b-t)$ ) est intégrable en  $0^+$ .

## 6 Séries numériques

L'étude des séries prolonge celle des suites. Elle permet d'illustrer le chapitre « Développements limités, calcul asymptotique », abordé en classe de première année TSI, et de préparer l'étude des séries entières et des séries de Fourier.

Cette section est étudiée notamment pour son intérêt dans l'étude des variables aléatoires discrètes ; son objectif majeur est la maîtrise de la convergence absolue.

### 6.1 Convergence et divergence

Sommes partielles. Convergence, divergence.

Somme et restes d'une série convergente.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Divergence grossière.

Séries géométriques : sommes partielles, condition nécessaire et suffisante de convergence ; somme en cas de convergence.

$\sum_k u_k$  désigne la série de terme général  $u_k$ , on dit aussi série associée à la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Les  $u_k$  sont dans toute cette section éléments de  $\mathbb{C}$ .

On note  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$  la somme de la série de terme général  $u_k$ , lorsqu'elle converge.

Exemples simples de séries convergentes, divergentes.

Si  $z \in \mathbb{C}$ , alors la série  $\sum_{n \geq 0} z^n$  converge si, et seule-

Espace vectoriel des séries convergentes ; linéarité de la somme.

Lien suite-série.

ment si,  $|z| < 1$ , auquel cas  $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ .

La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  et la série télescopique associée  $\sum_{k \geq 0} (u_k - u_{k+1})$  sont de même nature.

## 6.2 Cas des séries à termes positifs

Une série à termes réels positifs converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est majorée.

Si la série à termes réels positifs  $u_k$  converge alors la série associée à une permutation quelconque de la suite  $(u_k)$  converge aussi, et les sommes sont égales.

Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs : comparaison terme à terme, comparaison logarithmique, cas de domination, cas d'équivalence.

Comparaison à une série géométrique, règle de D'ALEMBERT.

Comparaison de l'intégrale  $\int_{n_0}^{\infty} f(t) dt$  et de la série  $\sum_{n \geq n_0} f(n)$  pour une fonction  $f : [n_0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  positive, continue et décroissante : la série  $\sum_{n \geq n_0} f(n)$  converge si, et seulement si,  $f$  est intégrable sur  $[n_0, +\infty[$ .

Séries de RIEMANN.

Dans le cas où une série à termes positifs est divergente, il est pratique de convenir que sa somme est égale à  $+\infty$ .

La suite  $v$  est une permutation de la suite  $u$  s'il existe une bijection  $\sigma$  de  $\mathbb{N}$  sur  $\mathbb{N}$  telle que  $v_n = u_{\sigma(n)}$ , pour tout entier naturel  $n$ .

Si  $0 \leq u_n \leq v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors la convergence de  $\sum_n v_n$  implique celle de  $\sum_n u_n$ , de plus  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .

Généralisation au cas où  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang ou si  $u_n = o(v_n)$  ou  $u_n = O(v_n)$ . Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont positives et si  $u_n \sim v_n$ , alors les séries  $\sum_n u_n$  et  $\sum_n v_n$  sont de même nature.

Toute autre règle de comparaison est hors programme.

Les élèves doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes, notamment dans le cas d'une fonction monotone.

Les élèves doivent savoir comparer une série à termes positifs à une série de Riemann.

## 6.3 Séries à termes quelconques

Séries alternées, critère de LEIBNIZ

Séries alternées, critère spécial de LEIBNIZ ; signe et majoration des restes en cas de convergence.

Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes, suites sommables

Convergence absolue d'une série  $\sum_n u_n$ , encore appelée sommabilité de la suite  $(u_n)_n$ .

La convergence absolue d'une série  $\sum_n u_n$  implique sa convergence, la réciproque est fautive.

Si la suite réelle  $(u_n)$  converge en décroissant vers 0, alors la série numérique  $\sum_n (-1)^n u_n$  converge. Les sommes partielles d'indices pairs et celles d'indices impairs forment un couple de suites adjacentes et elles encadrent de la somme.

La convergence de  $\sum_k u_k$  est établie à partir de la convergence des 4 séries à termes posi-

Somme d'une suite sommable. Inégalité triangulaire.

Pour tout complexe  $z$ , la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$  est absolument convergente; elle est donc convergente.

Une permutation des  $u_k$  ne modifie pas la propriété de convergence absolue, ni la somme d'une série absolument convergente  $\sum_k u_k$ .

Si  $(u_n)_n$  est une suite complexe et  $(v_n)_n$  est une suite de réels positifs telles que  $u_n = O(v_n)$ , alors la convergence de  $\sum_n v_n$  entraîne la convergence absolue de  $\sum_n u_n$ , donc aussi sa convergence.

tifs suivantes :  $\sum_k \operatorname{Re}(u_k)^+$ ,  $\sum_k \operatorname{Re}(u_k)^-$ ,  $\sum_k \operatorname{Im}(u_k)^+$ ,  $\sum_k \operatorname{Im}(u_k)^-$  où l'on a posé  $x^+ = \max(x, 0)$  et  $x^- = \max(-x, 0)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

Relation  $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ .

Résultat admis.

## Seconde période

### 1 Séries entières

Les séries entières constituent un outil puissant pour aborder certains calculs : résolution d'équations différentielles linéaires, expressions des fonctions génératrices en probabilités, ... Elles permettent également de revenir sur la thématique de la régularité des fonctions, introduite en première année, et donnent l'occasion d'introduire la « variable complexe ».

Dans ce cadre, cette section vise trois objectifs :

- ◆ étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme, grâce au concept fondamental de rayon de convergence ;
- ◆ introduire la notion de développement d'une fonction en série entière (série de Taylor) ;
- ◆ établir les développements en série entière des fonctions usuelles.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- ◆ puissent déterminer le rayon de convergence d'une série entière dans des cas standard ;
- ◆ connaissent les propriétés de la somme d'une telle série en se limitant au cas de la variable réelle (continuité ; dérivation et intégration terme à terme) ;
- ◆ connaissent les développements en série entière usuels et sachent les exploiter pour exprimer la somme d'une série ou les solutions d'une équation à l'aide de fonctions élémentaires ;
- ◆ soient capables d'appliquer la théorie des séries entières à la recherche de solutions d'une équation différentielle.

Les coefficients des séries entières considérées ici sont réels ou complexes et la variable est réelle ou complexe.

Pour tout  $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , on pose  $D(0, r) := \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$  ; si  $0 < r < +\infty$ ,  $D(0, r)$  est le disque ouvert de centre 0 et de rayon  $r$  ; par abus de langage, on dira que  $\mathbb{C}$  est le disque ouvert de rayon  $+\infty$ .

### 1.1 Rayon de convergence d'une série entière

Notion de série entière associée à une suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  de nombres complexes. Notation  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ .

Lemme d'Abel : si pour un réel  $r > 0$ , la suite  $(a_n r^n)_{n \geq 0}$  est bornée alors, pour tout nombre complexe  $z \in D(0, r)$ , la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  est absolument convergente.

Rayon de convergence  $R$  d'une série entière. Disque ouvert  $D(0, R)$  de convergence; intervalle ouvert de convergence  $] - R, R[$ .

Si le rayon de convergence  $R$  est un réel strictement positif, alors la série numérique  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  est absolument convergente pour tout  $z \in D(0, R)$ ; elle est grossièrement divergente pour tout  $z$  tel que  $|z| > R$ .

Soient  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$  des séries entières de rayons de convergence  $R_a$  et  $R_b$  respectivement; si  $|a_n| \leq |b_n|$  alors  $R_a \geq R_b$ .

Application de la règle de D'ALEMBERT pour les séries numériques au calcul du rayon.

Les série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} n a_n z^n$  ont même rayon de convergence.

Le rayon de convergence  $R$  est défini comme la borne supérieure dans  $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  de l'ensemble  $\{\rho \geq 0 \mid (a_n \rho^n)_n \text{ bornée}\}$ .

Toute étude systématique de la convergence sur le cercle de convergence est exclue.

En particulier, si  $a_n = O(b_n)$  alors  $R_a \geq R_b$  et si  $|a_n| \sim |b_n|$  alors  $R_a = R_b$ .

La règle de D'ALEMBERT relative aux séries entières est hors programme.

Démonstration non exigible.

Extension aux séries entières  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 1} n^\alpha a_n z^n, \alpha \in \mathbb{R}$ .

### 1.2 Somme d'une série entière d'une variable réelle

Fonction somme d'une série entière, domaine de définition.

La somme d'une série entière est de classe  $C^\infty$  sur son intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.

Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées successives en 0 de sa somme : avec les notations précédentes,  $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ .

Primitivisation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence. Intégration terme à terme sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.

La fonction  $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] - R, R[$  et, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{f^{(k)}(t)}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n t^{n-k}, t \in ] - R, R[.$$

Démonstration hors programme.

Si les fonctions  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  et  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$  coïncident sur un voisinage de 0, alors  $a_n = b_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  est une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ , une primitive sur l'intervalle  $] - R, R[$  de la fonction  $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$  s'obtient en intégrant terme à terme la série définissant  $f$ .

Démonstration hors programme.

### 1.3 Fonctions développables en série entière

Fonction développable en série entière sur un intervalle  $] -r, r[$ ,  $r > 0$  (ou développable en série entière au voisinage de 0).

Série de TAYLOR d'une fonction de classe  $C^\infty$  sur un intervalle  $] -r, r[$ ,  $r > 0$ .

Unicité des développements en série entière.

Développements en série entière en 0 des fonctions :  $t \mapsto e^{ta}$  ( $a \in \mathbb{C}$ ),  $t \mapsto \sin t$ ,  $t \mapsto \cos t$ ,  $t \mapsto \arctan t$ ,  $t \mapsto \ln(1+t)$ ,  $t \mapsto (1+t)^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ).

Développement de  $z \mapsto e^z$  sur  $\mathbb{C}$ ; développement de  $z \mapsto \frac{1}{1-z}$  sur  $D(0, 1)$ .

Une telle fonction est en particulier de classe  $C^\infty$  sur l'intervalle  $] -r, r[$ .

Les élèves doivent être capables de déterminer un développement en série entière à l'aide d'une équation différentielle et notamment l'usage de l'unicité de la solution d'un problème de CAUCHY.

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C}; \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, |z| < 1.$$

En première année TSI, l'exponentielle complexe est définie par la relation

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

où  $x$  et  $y$  sont deux réels quelconques.

## 2 Espaces probabilisés; variables aléatoires réelles; cas discret

Cette section complète l'étude des variables aléatoires finies déjà entamée en première année TSI et aborde celle des variables aléatoires discrètes; on y étudie aussi quelques résultats d'approximation.

Il est organisé autour des axes suivants :

- ◆ consolider les acquis de première année TSI sur les variables aléatoires discrètes;
- ◆ introduire les notions de fonction de répartition, de moments et de fonction génératrice, et familiariser les élèves avec ces notions en mettant en œuvre les définitions et résultats du cours sur des exemples simples;
- ◆ étudier des exemples usuels de lois discrètes réelles (loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique, loi de Poisson, ...);
- ◆ étudier la notion de convergence et quelques théorèmes limites.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- ◆ aient étudié des exemples usuels de lois discrètes réelles;
- ◆ sachent reconnaître les situations classiques de modélisation par des lois discrètes usuelles;
- ◆ sachent utiliser les fonctions génératrices pour déterminer la loi ou calculer les moments d'une variable aléatoire entière dans des cas standard;
- ◆ apprennent à utiliser le produit de convolution pour déterminer la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, discrètes;
- ◆ apprennent à approcher, sous certaines conditions, une loi binomiale par une loi de Poisson, et une loi hypergéométrique par une loi binomiale;
- ◆ sachent utiliser les théorèmes limites, dans des cas standard, pour donner des estimations à certains paramètres (espérance, variance, ...).

On admettra tout résultat utile sur les ensembles au plus dénombrable et la sommabilité d'une famille indexée sur  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}^2$  ou sur  $\mathbb{Z}^2$ .

## 2.1 Révisions et compléments sur les espaces probabilisés

Le préfixe  $\sigma$  utilisé dans  $\sigma$ -algèbre ou  $\sigma$ -additif renvoie au caractère dénombrable des opérations permises. La lettre  $\sigma$  est utilisée classiquement aussi pour désigner l'écart-type, racine carrée de la variance.

Tribu  $\mathcal{A}$  d'événements sur un univers  $\Omega$  ; espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

Événement : on appelle ainsi toute partie de  $\Omega$  qui est élément de la tribu  $\mathcal{A}$ .

On fera remarquer aussi que choisir  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$  n'est pas nécessairement une bonne solution. Ce choix augmente les contraintes à vérifier pour l'existence de probabilités.

Système complet fini ou dénombrable d'événements.

Tribu engendrée par un système complet fini ou dénombrable d'événements.

Définition d'espace probabilisé,  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Propriétés de la continuité monotone séquentielle : si  $(A_k)_{k \geq 1}$  est une suite d'événements croissante (resp décroissante) pour l'inclusion alors  $P(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k)$  (resp  $P(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k)$ ) est égale à  $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(A_k)$ .

Propriété de sous-additivité de  $P$  pour une réunion dénombrable d'événements.

Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion (resp. intersection) finie ou dénombrable d'événements négligeables (resp. presque sûrs) est un événement négligeable (resp. presque sûr).

Notion de probabilité conditionnelle.

On obtient un nouvel espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ .

Formule des probabilités composées ; formule des probabilités totales ; formule de Bayes.

Événements indépendants ; indépendance mutuelle d'une famille d'événements : par définition une famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'événements est indépendante

Le terme  $\sigma$ -algèbre est aussi employé. On ajoute à la notion rencontrée dans le cas fini la possibilité de réunir ou d'intersecter une famille dénombrable d'événements. Cela est indispensable pour de nombreuses raisons, par exemple : pour considérer des situations où l'on répète un jeu, sans fixer a priori un nombre maximum de répétitions, pour envisager le comportement asymptotique de probabilités...

Famille finie ou dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à  $\Omega$ .

Existence admise.

Une probabilité  $P$  est une application  $\sigma$ -additive de  $\mathcal{A}$  vers  $[0, 1]$  qui vérifie  $P(\Omega) = 1$ .

Conséquence immédiate : pour toute suite d'événements  $(B_k)_{k \geq 1}$  on a

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^n B_k\right)$$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right)$$

On parle aussi d'événement quasi-certain et de propriété presque sûre. L'adjectif négligeable est utilisé pour le contraire d'une propriété presque sûre, i.e. pour un événement de probabilité 0.

On pourra donner comme exemple d'événement négligeable la réalisation d'une suite infinie de PILE lors d'un jeu de PILE OU FACE.

On conditionne par un événement  $A$  de probabilité non nulle, on parle de probabilité sachant  $A$  et on écrit  $P_A$  ou parfois  $P(\cdot | A)$ .

Pour la formule des probabilités totales on considère un système complet d'événements en nombre fini ou dénombrable : soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un système complet d'événements non négligeables, alors pour tout événement  $B$  on a :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) P_{A_n}(B).$$

Si la famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'événements est indépendante, alors toute sous famille est indépendante. En particulier les événements sont indépendants

si, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $i_1, \dots, i_n$  éléments distincts de  $I$ ,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^n A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^n \mathbf{P}(A_{i_j}).$$

Si  $A$  et  $B$  sont indépendants, alors  $A$  et  $\bar{B}$  le sont aussi; si les événements  $A_i$  sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements  $B_i$ , avec  $B_i = A_i$  ou  $\bar{A}_i$ .

deux à deux. Attention l'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance mutuelle de la famille.

## 2.2 Variables aléatoires et lois de variables aléatoires

On appelle variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  toute application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, X^{-1}(] - \infty, x]) \in \mathcal{A}.$$

Si  $A$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  obtenu en opérant par passages au complémentaire, par réunions, par intersections sur une famille finie ou dénombrable d'intervalles de la forme  $] - \infty, x]$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , et si  $X$  est une variable aléatoire réelle alors  $\{X \in A\}$  appartient à  $\mathcal{A}$ . Donc  $\mathbf{P}(X \in A)$  a un sens.

Si  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$  est une famille finie de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et si  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  est une application continue alors l'application composée  $\omega \mapsto f(X_1(\omega), \dots, X_k(\omega))$  est une variable aléatoire réelle sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Si  $X$  est une variable aléatoire réelle sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et  $f$  une application monotone de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ , alors l'application composée  $f \circ X$  est une variable aléatoire réelle sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires réelles sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  telle que, pour tout  $\omega \in \Omega$ , la suite  $(X_n(\omega))_n$  converge vers  $X(\omega)$ , où  $X$  est une application de  $\Omega$  vers  $\mathbb{R}$ . Alors  $X$  est une variable aléatoire réelle sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

On appelle loi (relativement à  $P$ ) de la variable aléatoire réelle  $X$  l'application de  $\mathcal{I}(\mathbb{R})$  vers  $\mathbb{R}$  qui à tout intervalle réel  $J$  associe le nombre  $\mathbf{P}(X \in J)$ .

Pour toute partie  $A$  de  $\mathbb{R}$ ,  $X^{-1}(A)$  est l'image réciproque par  $X$  de  $A$ , c'est à dire l'ensemble des éléments  $\omega$  de  $\Omega$  qui vérifient  $X(\omega) \in A$ ; on la note plus simplement  $\{X \in A\}$ .

Pour  $A = ] - \infty, x]$  cette image réciproque est l'ensemble des éléments  $\omega$  de  $\Omega$  qui vérifient  $X(\omega) \leq x$ ; on la note plus simplement  $\{X \leq x\}$ .

C'est le cas, entre autres, pour tout partie  $A$  qui est un intervalle réel ou le complémentaire d'un intervalle réel; les élèves doivent savoir utiliser les relations suivantes :

$$\{X \in ]a, +\infty[ \} = \overline{\{X \in ] - \infty, a] \}},$$

$$\{X \in [a, +\infty[ \} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \{X \in ]a - 1/k, +\infty[ \},$$

$$\{X \in ] - \infty, a[ \} = \overline{\{X \in [a, +\infty[ \}},$$

$$\{X \in ]a, b[ \} = \{X \in ] - \infty, b[ \} \setminus \{X \in ] - \infty, a[ \},$$

$$\{X \in [a, b[ \} = \{X \in ] - \infty, b[ \} \setminus \{X \in ] - \infty, a[ \},$$

$$\{X \in [a, b[ \} = \{X \in ] - \infty, b[ \} \setminus \{X \in ] - \infty, a[ \},$$

$$\{X \in ]a, b[ \} = \{X \in ] - \infty, b[ \} \setminus \{X \in ] - \infty, a[ \}.$$

Notation  $f(X_1, \dots, X_k)$ .

La preuve de ce résultat n'est pas au programme; on en déduit le fait que la somme, le produit, le minimum, le maximum, ... d'une famille finie de variables aléatoires réelles est une variable aléatoire réelle.

Notation  $f(X)$ .

Le résultat s'étend au cas où  $f$  est monotone par morceaux.

La preuve utilise la définition de limite et les propriétés des tribus.

$\mathcal{I}(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble de tous les intervalles de  $\mathbb{R}$ . C'est un sous ensemble de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

On appelle loi (relativement à  $P$ ) d'une famille finie  $(X_1, \dots, X_k)$  de variables aléatoires réelles l'application de  $\mathcal{I}(\mathbb{R})^k$  vers  $\mathbb{R}$  qui à tout produit cartésien  $J_1 \times \dots \times J_k$  d'intervalles réels associe le nombre

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k (X_i \in J_i)\right).$$

Fonction de répartition  $F_X$  d'une variable aléatoire réelle  $X$  : c'est l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = P(X \leq t).$$

Propriétés de  $F_X$  : c'est une fonction croissante, continue à droite en tout point, de limite 0 en  $-\infty$  et de limite 1 en  $+\infty$ .

La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire réelle : la connaissance de  $F_X$  permet de calculer  $P(X \in I)$  pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

La continuité de la fonction  $F_X$  en  $t$  équivaut à  $P(X = t) = 0$ .

Loi d'une variable aléatoire obtenue par composition.

Indépendance d'une famille  $(X_j)_{j \in J}$  de variables aléatoires réelles : Une famille  $(X_j)_{j \in J}$  de variables aléatoires réelles est dite indépendante si, pour toute famille  $(I_j)_{j \in J}$  d'intervalles de  $\mathbb{R}$ , la famille  $((X_j \in I_j))_{j \in J}$  d'événements est indépendante.

Indépendance héritée : Si la famille  $(X_j)_{1 \leq j \leq n_k}$  est indépendante et si  $0 < n_1 < \dots < n_k$ , alors la

On note  $(X_1 \in J_1, \dots, X_k \in J_k)$  l'événement

$$\bigcap_{i=1}^k (X_i \in J_i).$$

La réciproque (au sens où toute fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant ces trois propriétés est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle) n'est pas au programme.

les élèves doivent savoir que :

$$P(X \in ]a, +\infty[) = 1 - F_X(a),$$

$$P(X \in [a, +\infty[) = 1 - \lim_{a^-} F_X,$$

$$P(X \in ]-\infty, a]) = \lim_{a^-} F_X,$$

$$P(X \in ]a, b]) = F_X(b) - F_X(a),$$

$$P(X \in [a, b]) = F_X(b) - \lim_{a^-} F_X,$$

$$P(X \in [a, b[) = \lim_{b^-} F_X - \lim_{a^-} F_X,$$

$$P(X \in ]a, b[) = \lim_{b^-} F_X - F_X(a),$$

$$P(X = a) = F_X(a) - \lim_{a^-} F_X.$$

On définit la fonction de répartition d'une famille finie  $(X_1, \dots, X_k)$  de variables aléatoires réelles comme étant l'application de  $\mathbb{R}^k$  vers  $\mathbb{R}$ ,  $(t_1, \dots, t_k) \mapsto P(X_1 \leq t_1, \dots, X_k \leq t_k)$ . Les résultats précédents s'étendent au cas d'une famille finie  $(X_1, \dots, X_k)$ .

Pas de résultats théoriques au programme dans le cas de plusieurs variables.

Il s'agit d'étudier la loi de  $Y = g(X)$  où  $X$  est une variable aléatoire de loi connue et  $g$  une fonction de la variable réelle, ou plus généralement, celle de  $Y = g(X_1, \dots, X_k)$ .

Aucun résultat théorique général n'est au programme; les exercices porteront sur des cas simples.

On distinguera l'indépendance de la famille de variables (dite mutuelle parfois) et l'indépendance deux à deux des variables. On notera que l'indépendance d'une famille de variables est relative à une probabilité donnée.

famille

$$\left( f_1(X_1, \dots, X_{n_1}), f_2(X_{n_1+1}, \dots, X_{n_2}), \dots, f_k(X_{n_{k-1}+1}, \dots, X_{n_k}) \right)$$

est indépendante.

### 2.3 Variables aléatoires discrètes

Une variable aléatoire réelle  $X$  est dite de loi discrète (relativement à la probabilité  $P$ ) s'il existe  $\Omega' \in \mathcal{A}$  de probabilité 1 tel que  $D = X(\Omega')$  soit au plus dénombrable.

On obtient

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x).$$

On dit que la loi de  $X$  est discrète usuelle s'il existe un intervalle  $J$  de  $\mathbb{N}$  et une bijection croissante

$$\varphi : J \rightarrow D, k \mapsto x_k.$$

L'usage est, dans ce cas, de représenter la loi de  $X$  par un tableau de lignes comportant en première ligne les  $x_k$ , éléments de  $D$ , écrits en ordre croissant, en deuxième ligne les probabilités correspondantes  $p_k = P(X = x_k)$ .

Exemples de lois discrètes.

Existence d'espaces probabilisés portant une suite  $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de variables aléatoires réelles indépendantes de lois discrètes données.

Loi conditionnelle de  $X$  sachant un événement non négligeable  $A$ .

Loi de la somme de variables aléatoires discrètes indépendantes.

Si  $(X_1, X_2)$  est un couple de variables aléatoires réelles indépendantes dont les lois sont discrètes d'ensembles de valeurs possibles respectifs  $D_1$  et  $D_2$  (sous ensembles de  $\mathbb{R}$  au plus dénombrables), alors la variable aléatoire  $S = X_1 + X_2$  est discrète.

On peut supprimer de  $D$  tous les éléments  $x$  tels que  $P(X = x) = 0$ ; les  $x$  restants sont appelées valeurs possibles de la variable discrète  $X$ .

La loi de  $X$  est caractérisée par la donnée de  $D$  et de l'application  $x \mapsto P(X = x)$ , de  $D$  dans  $\mathbb{R}$ .

Des lignes supplémentaires peuvent donner les cumulés  $\sum_{j \leq k} p_j$  ou les produits  $x_k p_k$ . Il est intéressant d'utiliser un tableur.

Loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique, loi de Poisson.

Modélisation du jeu Pile-Face répété (ou infini).

C'est  $(P_A)_X$  la loi de  $X$  sous la probabilité  $P_A$ . On l'utilise notamment dans le cas où  $(X, Y)$  est un couple de variables aléatoires réelles discrètes et  $A = (Y = t)$ ,  $t$  réel donné.

Proposer des exemples de somme de variables indépendantes.

Dans certains cas, on a une propriété de stabilité : la loi de la somme est du même type.

Étudier notamment le cas de lois de Poisson.

Dans ce cas, l'ensemble des valeurs possibles de  $S$  est  $D = \{u + v; (u, v) \in D_1 \times D_2\}$  et la loi de  $S$  est donnée, pour tout  $s \in D$ , par :

$$\begin{aligned} P(S = s) &= \sum_{u \in D_1} P(X_1 = u) P(X_2 = s - u) \\ &= \sum_{v \in D_2} P(X_1 = s - v) P(X_2 = v). \end{aligned}$$

Cette formule est appelée la convolution discrète des lois de  $X_1$  et  $X_2$ .

## 2.4 Espérance, moments

Il est recommandé de proposer ici de nombreux exercices sur des calculs d'espérances, de moments et de variances.

Si  $X$  est une variable aléatoire réelle de loi discrète, caractérisée par  $(x_k, p_k)_k$ , on définit l'espérance de  $X$  par la formule  $E(X) = \sum_k x_k p_k$ , sous réserve de la sommabilité de la famille  $(x_k p_k)_k$ .

Espérance de variables aléatoires discrètes réelles de lois usuelles.

Propriété de transfert à une variable :

Si  $X$  est une variable aléatoire réelle de loi discrète, caractérisée par  $(x_k, p_k)_k$ , alors la variable aléatoire  $Y = g(X)$  admet une espérance si, et seulement si, la famille  $(g(x_k) p_k)_k$  est sommable.

Propriété de transfert à deux variables :

Si  $(X_1, X_2)$  est un couple de variables aléatoires réelles de loi discrète (loi conjointe caractérisée par  $((x_i, y_j), p_{i,j})_{i,j}$ ), alors la variable aléatoire  $Y = g(X_1, X_2)$  admet une espérance si, et seulement si, la famille  $(g(x_i, y_j) p_{i,j})_{i,j}$  est sommable.

Si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires réelles discrètes sur l'espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$ , si  $Y$  admet une espérance et si  $|X| \leq Y$  alors  $X$  admet une espérance.

Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.

Espérance d'un produit de variables aléatoires réelles indépendantes, sous réserve d'existence.

Moments, variance, écart-type, covariance :

Le moment d'ordre  $k \in \mathbb{N}^*$  de  $X$  est, sous réserve d'existence,  $E(X^k)$ .

Si la variable aléatoire réelle discrète  $X$  admet un moment d'ordre 2, on appelle variance de  $X$  la quantité  $V(X) = E((X - E(X))^2)$  et écart-type de  $X$  la racine carrée de la variance :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2, alors :

- la variable aléatoire  $XY$  admet une espérance et  $E(XY)^2 \leq E(X^2) E(Y^2)$  (CAUCHY-SCHWARZ);
- $S = X + Y$  admet un moment d'ordre 2 et sa variance  $V(S)$  est donnée par la formule ci-contre.

Si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2, on définit

La sommabilité permet de donner une valeur finie qui ne dépend pas d'un ordre choisi des  $x_k$ .

En cas de sommabilité, on a :  $E(Y) = \sum_k g(x_k) p_k$ .

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible. On pourra en revanche traiter des exemples de recherche de l'espérance de  $Y = g(X)$ ; on évitera les exemples inutilement compliqués.

En cas de sommabilité, on a :

$$E(Y) = \sum_{i,j} g(x_i, y_j) p_{i,j}.$$

La démonstration de ce résultat n'est pas au programme. On traitera des exemples simples de recherche de l'espérance de  $Y = g(X_1, X_2)$ .

Les démonstrations de ces propriétés peuvent être présentées aux élèves.

Si la variable aléatoire réelle discrète  $X$  admet un moment d'ordre  $k \in \mathbb{N}^*$ , alors elle admet un moment d'ordre  $j$  pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$ ; de même la variable aléatoire réelle discrète  $X + \alpha$  admet un moment d'ordre  $k$ , pour tout réel  $\alpha$ .

Dans ce cas on a :

- $V(X) \geq 0$  et  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ ;
- $V(X) = 0 \Leftrightarrow X$  est constante presque partout;
- $V(X + \alpha) = V(X)$ , pour tout réel  $\alpha$ .

$$V(S) = V(X) + V(Y) + 2E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

Avec cette notation on obtient

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y).$$

Si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires réelles ad-

la covariance du couple  $(X, Y)$  par la formule

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))) \\ &= \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).\end{aligned}$$

Corrélation linéaire : si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2 de lois non certaines (i.e. variances non nulles), on définit le coefficient de corrélation linéaire du couple  $(X, Y)$  par la formule

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Si  $X$  admet un moment d'ordre 1, on appelle variable centrée associée à  $X$  la variable aléatoire réelle  $\tilde{X} = X - \mathbf{E}(X)$ .

Si  $X$  admet un moment d'ordre 2, on appelle variable centrée réduite associée à  $X$  la variable aléatoire réelle  $X^* = \frac{1}{\sigma(X)}(X - \mathbf{E}(X))$ .

mettant un moment d'ordre 2 et si ces variables sont indépendantes, leur covariance est nulle.

La variance de la somme est alors la somme des variances.

La réciproque est fautive : covariance nulle n'implique pas indépendance.

Le coefficient de corrélation linéaire du couple  $(X, Y)$  est un élément de l'intervalle  $[-1, 1]$ .

Le cas  $\rho = 1$  équivaut à  $Y = \alpha X$  avec  $\alpha > 0$ ,

le cas  $\rho = -1$  équivaut à  $Y = \alpha X$  avec  $\alpha < 0$ .

L'indépendance de  $X$  et  $Y$  implique  $\rho = 0$ , la réciproque est fautive.

## 2.5 Fonctions génératrices

Fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  :

$$G_X(t) = \mathbf{E}(t^X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k \mathbf{P}(X = k).$$

La loi de  $X$  est caractérisée par  $G_X$ .

Lien entre fonction génératrice et moments : la variable aléatoire  $X$  admet une espérance si, et seulement si,  $G_X$  est dérivable en 1, auquel cas  $\mathbf{E}(X) = G'_X(1)$ ; la variable aléatoire  $X$  admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si,  $G_X$  admet une dérivée seconde en 1, auquel cas  $\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X) = G''_X(1)$ .

Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

La série entière définissant  $G_X$  est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et  $G_X(1) = 1$ ; cette série converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1.

La fonction  $G_X$  est continue sur  $[-1, 1]$  et est de classe  $C^\infty$  sur  $] -1, 1[$ .

Les élèves doivent savoir retrouver l'expression de la variance de  $X$  à l'aide de  $G'_X(1)$  et  $G''_X(1)$ .

Les élèves doivent savoir calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

Expression de la fonction génératrice de la variable aléatoire  $X_1 + \dots + X_n$  quand les  $X_i$  sont indépendantes.

## 2.6 Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites

Inégalité de MARKOV : Si  $X$  est une variable aléatoire réelle discrète positive admettant une espérance, alors, pour tout  $\alpha > 0$ ,

$$\mathbf{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{\alpha}.$$

Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV : Si  $X$  est une variable aléatoire réelle discrète admettant un mo-

Cette inégalité permet de démontrer l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.

Interprétation : la variance permet de contrôler l'écart entre  $X$  et sa valeur moyenne  $\mathbf{E}(X)$ .

ment d'ordre 2, alors, pour tout  $\beta > 0$ ,

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \beta) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\beta^2}.$$

Inégalité de JENSEN : Si  $X$  est une variable aléatoire réelle discrète admettant une espérance, si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une application convexe sur  $\mathbb{R}$  et si  $Y = f(X)$  admet une espérance, alors

$$f(\mathbf{E}(X)) \leq \mathbf{E}(f(X)).$$

Définition de la convergence en probabilité d'une suite  $(X_n)_n$  de variables aléatoires réelles discrètes vers une variable aléatoire réelle  $Y$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|Y - X_n| \geq \varepsilon) = 0.$$

Définition de la convergence en loi d'une suite  $(X_n)_n$  de variables aléatoires réelles vers une variable aléatoire réelle  $Y$  :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus D_Y, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(t) = F_Y(t),$$

où  $D_Y$  désigne l'ensemble des points de discontinuité de la fonction  $F_Y$ .

Si les variables aléatoires  $X_n$  ainsi que  $Y$  sont à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , la convergence en loi de la suite  $(X_n)_n$  vers  $Y$  équivaut à :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(Y = k).$$

La convergence en probabilité implique la convergence en loi. La réciproque est fautive.

Loi faible des grands Nombres : si  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2, alors la suite  $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k)_{n \geq 1}$ , de variables aléatoires, converge en probabilité vers la variable constante  $\mu = \mathbf{E}(X_1)$ .

Si, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la suite  $(f_k(x))_k$  converge vers  $g(x)$ , alors la suite de variables aléatoires réelles  $(f_k(X))_k$  converge en probabilité vers  $g(X)$ .

En fait la limite d'une convergence en loi est la loi de  $Y$ .

Exemple à connaître : soit  $\lambda > 0$  et soit  $(p_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels positifs telle que la suite  $(np_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\lambda$ ; si, pour tout  $n \geq 1$ ,  $X_n$  est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre  $(n, p_n)$  alors la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers la variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.

Résultat admis.

Application : interprétation fréquentiste de  $\mathbf{P}(A)$ .

RELIÈGE CTURIE

### 3 Espaces préhilbertiens réels. Endomorphismes des espaces euclidiens

L'objectif de cette section est triple :

- ◆ consolider les acquis de première année TSI concernant le produit scalaire et les espaces euclidiens, en généralisant les outils de géométrie vectorielle euclidienne du plan et de l'espace à des dimensions quelconques ;
- ◆ étudier les isométries vectorielles et les matrices orthogonales, notamment dans le cas des dimensions 2 et 3 en insistant sur les représentations géométriques ;
- ◆ aborder la réduction des matrices symétriques réelles.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- ◆ maîtrisent les notions de bases sur le produit scalaire et les espaces euclidiens : vecteurs et sous-espaces orthogonaux, bases orthonormales, supplémentaires orthogonaux ;
- ◆ sachent orthogonaliser une famille libre d'un espace préhilbertien au moyen de l'algorithme de GRAM-SCHMIDT ;
- ◆ soient capables d'exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie et sachent calculer la distance d'un vecteur à un tel sous-espaces (théorème de la projection orthogonale, existence de la meilleure approximation quadratique) ;
- ◆ maîtrisent, dans le cas euclidien, les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs, automorphismes orthogonaux) et le point de vue matriciel.

*Les espaces préhilbertiens considérés dans ce chapitre sont réels. Toute notion sur les espaces préhilbertiens complexes est hors programme.*

### 3.1 Rappels sur les produits scalaires

Produit scalaire.

Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens.

Exemples de référence : produit scalaire euclidien canonique sur  $\mathbb{R}^n$ , produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , produits scalaires définis par une intégrale sur les espaces de fonctions continues.

Notations  $\langle x | y \rangle$ ,  $\langle x, y \rangle$ ,  $(x | y)$ ,  $x \cdot y$ .

Expressions  $xy^T$ ,  $\text{tr}(A^T B)$ .

Produit scalaire

$$(f, g) \mapsto (f | g) = \int_a^b fg$$

sur  $C([a, b], \mathbb{R})$ , produit scalaire  $(f, g) \mapsto (f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} fg$  sur l'espace vectoriel  $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions continues  $2\pi$ -périodiques sur  $\mathbb{R}$ .

Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. Cas d'égalité.

Norme associée à un produit scalaire, distance.

Inégalité triangulaire, cas d'égalité.

Relations entre produit scalaire et norme ; identités de polarisation ; identité du parallélogramme.

Notation  $\| \cdot \|$ .

Les élèves doivent savoir manipuler les identités remarquables sur les normes (développement de  $\|u \pm v\|^2$ , identité de polarisation...).

$$2\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2.$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

### 3.2 Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel  $F$ , d'une partie  $X$ .

Famille orthogonale, orthonormale (ou orthonormée). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Théorème de PYTHAGORE, cas d'une famille finie de vecteurs.

Algorithme d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT.

Notation  $F^\perp$ ,  $X^\perp$ . L'orthogonal d'une partie est un sous-espace vectoriel.

Exemples de suites orthonormales dans l'espace des polynômes, dans l'espace des fonctions continues  $T$ -périodiques, etc.

Les élèves doivent savoir mettre en œuvre l'algorithme dans le cas d'un nombre restreint de vecteurs.

Application au calcul d'une base orthonormée de polynômes pour différents produits scalaires.

Existence de bases orthonormales dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormale incomplète.

Coordonnées dans une base orthonormale, expressions du produit scalaire et de la norme.

Expression  $X^T Y$  du produit scalaire de deux vecteurs  $x$  et  $y$  de coordonnées  $X$  et  $Y$  dans une base orthonormale.

Les élèves doivent savoir calculer, à l'aide du produit scalaire, les coefficients de la matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormale.

### 3.3 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

*Pour étudier la notion de projection orthogonale et la distance à un sous-espace, on s'appuie sur des figures.*

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors  $F$  et  $F^\perp$  sont supplémentaires.

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel  $F$  de dimension finie, notée  $p_F$ . Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormée.

Distance d'un vecteur  $x$  à un sous-espace vectoriel  $F$  de dimension finie ; caractérisation métrique du projeté orthogonal : le projeté orthogonal de  $x$  sur  $F$ , noté  $p_F(x)$ , est l'unique élément de  $F$  qui minimise la distance de  $x$  à  $F$ .

En dimension finie, projeté orthogonal d'un vecteur  $x$  sur l'hyperplan  $\text{vect}(u)^\perp$  ; distance de  $x$  à  $\text{vect}(u)^\perp$ .

En dimension finie, dimension de  $F^\perp$ .

Les élèves doivent savoir déterminer  $P_F(x)$  en calculant son expression dans une base orthonormale de  $F$  ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité du vecteur  $x - P_F(x)$  aux vecteurs d'une base (ou à défaut d'une famille génératrice) de  $F$ .

Notation  $d(x, F)$ .

$$\|x - p_F(x)\| = \min_{y \in F} \|x - y\|.$$

Application à l'approximation d'une fonction par des polynômes au sens de la norme en moyenne quadratique.

Applications géométriques à des calculs de distances.

Les élèves doivent savoir calculer la distance d'un vecteur à un hyperplan, la distance d'un vecteur à une droite.

### 3.4 Matrices orthogonales

Matrice orthogonale : définition par  $A^T A = I_n$  ; caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.

Interprétation comme matrice de changement de base orthonormée.

Groupe orthogonal.

Déterminant d'une matrice orthogonale. Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte. Groupe spécial orthogonal.

Matrices orthogonalement semblables.

Si  $\mathcal{B}_0$  est une base orthonormée de  $E$ , une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  est orthonormée si, et seulement si, la matrice de passage de  $\mathcal{B}_0$  à  $\mathcal{B}$  est orthogonale.

Notations  $O_n(\mathbb{R})$ ,  $O(n)$ .

On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Notations  $SO_n(\mathbb{R})$ ,  $SO(n)$ .

### 3.5 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Isométries vectorielles d'un espace euclidien : définition par la linéarité et la conservation des normes.

On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal » tout en lui préférant « isométrie vectorielle ».

Exemples : symétrie orthogonale, réflexion.

Caractérisation des isométries vectorielles de  $E$  parmi les endomorphismes de  $E$  : par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une (de toute) base orthonormée ; caractérisation d'une isométrie à l'aide de la matrice associée dans une (toute) base orthonormale.

Groupe orthogonal.

Déterminant d'une isométrie ; déterminant d'une réflexion. Isométrie directe ou positive (rotation), indirecte ou négative.

Groupe spécial orthogonal.

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.

On s'appuie sur des figures.

Lien entre les notions de base orthonormale, d'isométrie et de matrice orthogonale : une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est orthogonale si, et seulement si, l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  qui lui est canoniquement associé est une isométrie vectorielle ; changement de base orthonormale.

Notation  $O(E)$ . On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Application à l'orientation d'un espace euclidien et à la notion de base orthonormée directe (b.o.n.d.). Caractérisation d'une rotation par l'image d'une (de toute) base orthonormée directe.

Notation  $SO(E)$ .

Si le sous-espace  $F$  est stable par l'isométrie  $u$ , alors  $F^\perp$  est aussi stable par  $u$ .

### 3.6 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Description des matrices orthogonales directes et indirectes de taille 2.

Matrice de rotation  $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  associée à un nombre réel  $\theta$ .

Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté : matrice dans une base orthonormée directe d'une rotation, mesure de l'angle d'une rotation.

Classification des isométries d'un plan euclidien.

$$O_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\};$$

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

$$SO_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta); \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Le groupe  $SO_2(\mathbb{R})$  est commutatif : deux matrices quelconque du groupe  $SO_2(\mathbb{R})$  commutent.

La matrice d'une rotation dans une b.o.n.d. est indépendante de la b.o.n.d. choisie.

On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.

Dans un plan euclidien  $E$ , toute isométrie est soit une réflexion, soit une rotation ; décomposition d'une rotation en produit de deux réflexions dont l'une est choisie arbitrairement.

### 3.7 Isométries d'un espace euclidien de dimension 3

Classification des isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension trois.

Description des isométries positives et des matrices de  $SO_3(\mathbb{R})$ .

Rotation vectorielle d'un espace euclidien orienté de dimension 3 : matrice dans une base adaptée, axe et mesure de l'angle d'une rotation  $u$ .

Description des isométries négatives.

Utilisation des éléments propres pour la classification des isométries.

Les élèves doivent savoir déterminer les caractéristiques géométriques d'une isométrie.

Si  $u \in SO(E)$ , alors  $\emptyset \neq \text{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$  et il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  vaut soit  $I_3$ , soit  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  soit  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ , avec  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ .

Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est une isométrie négative, alors  $\emptyset \neq \text{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$  et il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  vaut soit  $-I_3$ , soit  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , soit  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ , avec  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ .

Caractérisation des symétries orthogonales par leurs représentations matricielles.

Les symétries orthogonales par rapport à une droite (resp. un plan) de  $E$ , appelées aussi demi-tours ou renversements ou retournements (resp. réflexions), sont donc les éléments de  $SO(E)$  (resp.  $O(E) \setminus SO(E)$ ) admettant  $-1$  (resp.  $1$ ) comme valeur propre.

### 3.8 Matrices symétriques réelles

Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont toutes réelles.

Démonstration non exigible.

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.

Théorème spectral : toute matrice carrée symétrique réelle  $A$  est orthogonalement diagonalisable ; autrement dit, il existe une matrice diagonale  $D$  et une matrice orthogonale  $P$  telles que  $A = PDP^{-1} = PDP^T$ .

Démonstration hors programme.

La notion d'endomorphisme symétrique est hors programme.

## 4 Séries de FOURIER

L'étude des séries de FOURIER est présentée dans le cadre des fonctions  $T$ -périodiques, continues par morceaux et à valeurs réelles. Cette section développe des compétences de calcul à travers celui des coefficients de FOURIER et l'application du théorème de PARSEVAL. L'interprétation géométrique de la  $n$ -ième somme de FOURIER comme projection orthogonale relie les points de vue analytique et géométrique de la théorie. Cette section favorise aussi l'interaction entre les disciplines.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- ◆ sachent exprimer le développement en série de FOURIER d'une fonction périodique ;
- ◆ connaissent le comportement asymptotique des coefficients de FOURIER d'une telle fonction en fonction de sa régularité ;
- ◆ sachent interpréter la convergence en moyenne quadratique des sommes partielles de la série de FOURIER d'une fonction périodique en utilisant la structure d'espace préhilbertien.

*Les fonctions considérées dans ce chapitre sont à valeurs réelles, périodiques et continues par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .*

### 4.1 Fonctions définies par morceaux

Fonctions continues (resp. de classe  $C^1$ ) par morceaux sur un segment.

Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite continue (resp. de classe  $C^1$ ) par morceaux sur  $[a, b]$  s'il existe une subdivision  $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  de  $[a, b]$  telle que, pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]x_k, x_{k+1}[$  est prolongeable en une fonction continue (resp. de classe  $C^1$ ) sur le segment  $[x_k, x_{k+1}]$ .

Une telle subdivision  $\sigma$  est dite *adaptée* à  $f$ .

Fonctions continues par morceaux sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Opérations sur les fonctions continues par morceaux.

Une fonction  $f$  est dite continue par morceaux sur  $I$  si sa restriction à tout segment de  $I$  est continue par morceaux.

Fonctions  $T$ -périodique continues (resp. de classe  $C^1$ ) par morceaux sur  $\mathbb{R}$  : une fonction

Interprétation graphique.

Exemple des signaux physiques ; dualité temps-

$T$ -périodique  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite continue (resp. de classe  $C^1$ ) par morceaux sur  $\mathbb{R}$  si elle est continue (resp. de classe  $C^1$ ) sur une période, c'est-à-dire sur un segment du type  $[a, a+T]$ , avec  $a \in \mathbb{R}$ .  
Espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles,  $T$ -périodiques et continues par morceaux sur  $\mathbb{R}$  (resp. de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ ).  
Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.  
Intégrale sur une période d'une fonction  $T$ -périodique et continue par morceaux.

fréquence.

Brève extension, au cas des fonctions continues par morceaux, des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année TSI.  
Aucune construction n'est exigible.

### 4.2 Coefficients et séries de FOURIER

Coefficients de FOURIER trigonométriques d'une fonction  $f$ ,  $T$ -périodiques et continues par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

Notation  $a_k(f)$  et  $b_k(f)$  ou, plus simplement,  $a_k$  et  $b_k$ .

Le coefficient  $a_0$  est défini comme la valeur moyenne sur une période.

Cas des fonctions paires, impaires.

Dans le cas des fonctions vérifiant la relation  $f(x + T/2) = -f(x)$ , tous les coefficients d'indices pairs sont nuls.

Exemple des symétries de glissement en sciences industrielles.

Sommes partielles de FOURIER d'une fonction  $f$  : elles sont définies, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{R}$ , par :

Dans le cas des fonctions continues, interprétation géométrique de  $S_n(f)$  comme la projection orthogonale de  $f$  sur le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions  $t \mapsto \cos(k\omega t)$  et  $t \mapsto \sin(k\omega t)$ ,  $k \in \{0, \dots, n\}$ , pour le produit scalaire défini par

$$S_n(f)(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

où  $\omega = 2\pi/T$ .

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t)\psi(t) dt.$$

### 4.3 Théorèmes de convergence

Théorème de PARSEVAL : si  $f$  est une fonction  $T$ -périodique et continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , alors les séries  $\sum a_n^2$  et  $\sum b_n^2$  convergent et

Démonstration hors programme.

Interprétation géométrique du théorème de PARSEVAL dans le cas des fonctions continues.

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Les élèves doivent savoir appliquer ce résultat pour calculer la somme de certaines séries numériques. Interprétation en sciences physiques et en sciences industrielles : puissance, valeur efficace, taux de distorsion.

Théorème de DIRICHLET : si  $f$  est une fonction  $T$ -périodique et de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , alors la série de FOURIER de  $f$  converge en tout point et

Démonstration hors programme.

On appelle régularisée de  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t) = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} (f(t+h) + f(t-h)).$$

$$t \mapsto \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} (f(t+h) + f(t-h)).$$

Tracé de sommes partielles de Fourier d'une fonction.

Cas où  $f$  est continue et de classe  $C^1$  par morceaux.

Les élèves doivent savoir appliquer ce résultat pour calculer la somme de certaines séries numériques. Utilisations en sciences physiques et en sciences

industrielles : décomposition en harmoniques.

## 5 Équations différentielles linéaires

Cette section a pour objectifs d'étudier les équations différentielles linéaires. Elle est organisée autour des axes suivants :

- ◆ introduire quelques notions de base sur les équations différentielles linéaires et familiariser les élèves avec ces notions en mettant en œuvre les résultats du cours sur des exemples simples ;
- ◆ étudier les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 et 2 ;
- ◆ étudier les systèmes d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 à coefficients constants, en relation avec la réduction des matrices.

La résolution explicite des systèmes linéaires à coefficients constants n'est pas un objectif du programme. On limitera en conséquence la technicité des exercices d'application et on pourra, en dimension 2, représenter certaines des courbes intégrales.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- ◆ aient pratiqué, sur des exemples, l'étude d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 et notamment la recherche de solutions développables en série entière ainsi que les problèmes de raccordements de solutions ;
- ◆ aient pratiqué, sur des exemples, la résolution d'un système différentiel linéaire à coefficients constants du type  $X' = AX$ , où  $A$  est une matrice à coefficients réels ou complexes, par réduction de  $A$  à une forme diagonale (ou triangulaire en dimension  $\leq 3$ ).

Dans ce qui suit,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 5.1 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2, solutions, structures

Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1.	Rappel de première année TSI.
Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2.	Elle est de la forme $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ où $a, b$ et $c$ sont des fonctions continues de $I$ vers $\mathbb{K}$ .
Équation différentielle homogène associée.	
Solution d'une équation différentielle linéaire scalaires d'ordre 2.	Principe de superposition.
Forme des solutions.	Somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
Problème de CAUCHY ; solution d'un problème de CAUCHY.	
Théorème de CAUCHY linéaire : existence et unicité de la solution globale d'un problème de CAUCHY associé à une équation différentielle linéaire scalaires d'ordre 2.	La démonstration est hors programme.
Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $C^2(I, \mathbb{K})$ .	Dimension de l'espace des solutions.
Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire scalaires d'ordre 2, avec second membre.	Les élèves doivent savoir exploiter la recherche de solutions particulières polynomiales ou développables en série entière.
Résolution, par abaissement de l'ordre, dans le cas où une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas sur $I$ est connue.	Détermination des solutions de l'équation homogène en se ramenant, à l'aide d'un changement de fonction, à une équation différentielle linéaire du premier ordre. En général, la recherche d'une solution particu-

Cas particulier des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 homogènes à coefficients constants.

Exemples d'étude d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2, non résolues, de la forme :

$$a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = d(t).$$

Exemples de résolution d'équations différentielles par changement de variable.

lière de l'équation complète doit comporter des indications.

Lien avec la forme des solutions d'une équation scalaire d'ordre 2 étudiée en première année TSI.

Cas des systèmes avec une masse variable dans le temps.

Exemples d'étude de problèmes de raccordements de solutions.

Toute indication utile doit être fournie.

## 5.2 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Système différentiel linéaire homogène à coefficients constants.

Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Structure de l'ensemble des solutions.

Étude lorsque  $A$  est une matrice diagonalisable.

Exemples de calculs explicites de solutions.

Équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre  $n$  à coefficients constants.

Équivalence entre une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre  $n$ , à coefficients constants, et un système de  $n$  équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants. Solution d'une telle équation, problème de Cauchy associé.

Cas particulier des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 homogènes à coefficients constants.

Il est de la forme  $X' = AX$ , avec  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Démonstration hors programme.

Espace vectoriel des solutions d'un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants, dimension.

Exemples d'étude du comportement asymptotique des solutions en fonction du spectre de  $A$ .

Pratique guidée de la résolution en se limitant aux deux cas :  $A$  diagonalisable ou trigonalisable et  $n \leq 3$ .

Elle est de la forme

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0,$$

où  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ .

Les élèves doivent savoir écrire une telle équation sous la forme d'un système différentiel  $X' = AX$ .

Lien avec la forme des solutions d'une équation scalaire d'ordre 2 étudiée en première année TSI.

## 6 Fonctions de plusieurs variables

L'objectif de cette section est de présenter les premières notions de calcul différentiel pour des fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $n \leq 3$ ; ce qui permet d'étendre les notions de base du calcul différentiel d'une variable aux fonctions de plusieurs variables en vue de les appliquer à l'analyse et la géométrie : recherche d'extremums, résolution d'équations aux dérivées partielles, étude locale des courbes et des surfaces.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- ◆ sachent vérifier si une fonction est de classe  $C^k$  ( $k \in \{1, 2\}$ ) et en calculer les dérivées partielles ;
- ◆ soient en mesure de déterminer les points critiques d'une fonction, si elle en admet, et en

rechercher les extremums locaux ou globaux ;

- ◆ soient capables d'appliquer les résultats du calcul différentiel notamment pour déterminer les vecteurs tangents au graphe d'une fonction de deux variables ou à une surface d'équation  $f(x, y, z) = 0$ , et préciser le plan tangent à une surface définie par une équation cartésienne  $z = \varphi(x, y)$  ;
- ◆ soient initiés à la résolution d'équations aux dérivées partielles à travers l'étude d'exemples simples.

Les applications  $f$  considérées dans ce chapitre sont définies sur une partie de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs réelles. On se limite en pratique au cas  $n \leq 3$ .

## 6.1 Introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$

Norme et distance euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$ .

Tout développement sur les normes non euclidiennes est hors programme.

Boules (ouvertes, fermées), sphères. Partie bornée de  $\mathbb{R}^n$ .

Partie ouverte. Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.

Une boule ouverte est un ouvert.

Partie fermée. Stabilité par intersection quelconque, par réunion finie.

Une boule fermée et une sphère sont fermées.

Point intérieur, point extérieur, point adhérent. Intérieur, frontière (ou bord) d'une partie de  $\mathbb{R}^n$ .

Ces notions sont illustrées par des figures. Les caractérisations séquentielles sont hors programme.

## 6.2 Limite et continuité

Limite en un point adhérent, continuité en un point, continuité sur une partie. Opérations.

L'étude de la continuité d'une fonction de plusieurs variables n'est pas un attendu du programme.

Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée de  $\mathbb{R}^n$  est bornée et atteint ses bornes.

Résultat admis.

## 6.3 Dérivées partielles, applications de classe $C^k$ sur une partie ouverte, $k = 1$ ou 2

Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs réelles.

Notations  $\partial_j f(a)$  et  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ .

La notion de différentielle en un point est hors programme.

Fonction de classe  $C^1$  sur  $U$ .

Une fonction est dite de classe  $C^1$  sur  $U$  si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur  $U$ .

Opérations sur les fonctions de classe  $C^1$ .

Une fonction de classe  $C^1$  sur  $U$  est continue sur  $U$ .

Démonstration hors programme.

Dans  $\mathbb{R}^n$  muni de sa structure euclidienne canonique  $(\cdot, \cdot)$ , gradient en  $a \in U$  d'une application numérique  $f$  de classe  $C^1$  sur  $U$ .

Le gradient est défini par ses coordonnées.

Notation  $\nabla f(a)$ .

Égalité :  $\sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a) = (\nabla f(a)|h)$ .

Développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de classe  $C^1$ .

Existence admise.

Dérivée de  $t \mapsto f(x(t), y(t))$ , dérivée le long d'un arc  $\gamma$ .  
Interprétation géométrique en termes de tangentes.

Si  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est dérivable en  $t$ ,  $\gamma(I) \subset U$  et  $f$  de classe  $C^1$  sur  $U$ , alors l'application  $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable en  $t$  et

$$(f \circ \gamma)'(t) = (\nabla f(\gamma(t)) \mid \gamma'(t)).$$

Application au calcul des dérivées partielles d'une composée de la forme

$$F : (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v)).$$

Règle de la chaîne (chain rule) :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$$

Les élèves doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires et savoir étendre le résultat précédent au cas de trois variables.

Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction de deux ou trois variables à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Fonction de classe  $C^2$ .

Une fonction est dite de classe  $C^2$  sur un ouvert  $U$  si ses dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues sur  $U$ .

Notations  $\partial_i \partial_j f$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ .

Théorème de Schwarz.

Opérations algébriques sur les fonctions de classe  $C^2$ .

Démonstration hors programme.

## 6.4 Équations aux dérivées partielles

Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

En liaison avec le programme de sciences physiques, on pourra étudier l'équation du transport, l'équation de la diffusion thermique et l'équation de propagation.

Pour l'étude d'équations aux dérivées partielles, les élèves doivent savoir exploiter les techniques de changements de variables : transformations affines, passage en coordonnées polaires.

L'expression des solutions en fonction des variables initiales n'est pas exigée.

## 6.5 Extremums d'une fonction de deux variables

Point critique d'une fonction.

Extremum local, global.

Condition nécessaire d'existence d'un extremum local.

Si une fonction  $f$  de classe  $C^1$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  admet un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique de  $f$ .

Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie fermée bornée de  $\mathbb{R}^n$ .

## 6.6 Applications géométriques des notions précédentes

Courbe du plan définie par une équation  $f(x, y) = 0$  avec  $f$  de classe  $C^1$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

Point régulier.

Cas particulier des courbes d'équation  $y = g(x)$ .

Tangente en un point régulier définie comme la droite orthogonale au gradient et passant par le point.

On admettra l'existence d'un paramétrage local de classe  $C^1$  et on fera le lien avec la tangente à un arc paramétré.

En un point où il est non nul, le gradient de  $f$  est orthogonal aux lignes de niveau  $f(x, y) = \lambda$  et orienté dans le sens des valeurs croissantes de  $f$ .

Démonstration hors programme.

Surface définie par une équation  $f(x, y, z) = 0$  avec  $f$  de classe  $C^1$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ .

Cas particulier des surfaces d'équation

$$z = g(x, y).$$

Point régulier.

Plan tangent à une surface en un point régulier défini comme le plan orthogonal au gradient et passant par le point.

Équation cartésienne.

Position relative locale entre une surface d'équation  $z = g(x, y)$  et son plan tangent.

## 7 Variables aléatoires à densité

Cette section complète l'étude des variables aléatoires discrètes et aborde celle des variables aléatoires à densité ; on y étudie aussi des résultats d'approximation.

Il est organisé autour des axes suivants :

- ◆ introduire, dans le cas des lois à densité, les notions de fonction de répartition, de moments et familiariser les élèves avec ces notions en mettant en œuvre les définitions et résultats du cours sur des exemples simples ;
- ◆ étudier des exemples usuels de lois à densité sur  $\mathbb{R}$  (loi uniforme, loi exponentielle, loi gamma, loi gaussienne (ou normale), ...);
- ◆ étudier la notion de convergence et quelques théorèmes limites.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- ◆ aient étudié des exemples usuels de lois à densité ;
- ◆ sachent reconnaître les situations classiques de modélisation par des lois continues usuelles ;
- ◆ soient capables de déterminer la densité d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition ;
- ◆ apprennent à utiliser le produit de convolution pour déterminer la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, discrètes ou à densité ;
- ◆ sachent utiliser les théorèmes limites, dans des cas standard, pour donner des estimations à certains paramètres (espérance, variance, ...).

### 7.1 Variables aléatoires à densité

Une variable aléatoire réelle  $X$  est dite de loi à densité (relativement à la probabilité  $P$ ) si sa fonction de répartition  $F_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  privé d'un sous-ensemble fini  $F$  (éventuellement vide).

Une telle variable aléatoire est dite aussi de loi continue. On appelle alors densité de  $X$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_X(t) = F'_X(t)$  pour  $t \in \mathbb{R} \setminus F$  et  $f_X(t) = 0$  pour  $t \in F$ .

La densité est une fonction positive, continue sur  $\mathbb{R} \setminus F$ , d'intégrale convergente et valant 1 sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout intervalle  $I$  de borne inférieure  $a \in \mathbb{R}$  et de borne supérieure  $b \in \mathbb{R}$ , on a :

$$P(X \in I) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t) dt.$$

Exemples de lois continues.

Loi uniforme sur un segment réel  $[a, b]$ , loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ , loi gamma de

Loi de la somme de variables indépendantes.

Si  $(X_1, X_2)$  est un couple de variables aléatoires réelles indépendantes telles que  $X_1$  soit discrète, d'ensemble de valeurs possibles  $D_1$ , et  $X_2$  soit continue, de densité  $f_2$ , alors la variable aléatoire  $S = X_1 + X_2$  est à densité.

Si  $(X_1, X_2)$  est un couple de variables aléatoires réelles indépendantes dont les lois sont continues, de densités respectives  $f_1$  et  $f_2$ , alors la variable aléatoire  $S = X_1 + X_2$  est à densité.

paramètre  $(\alpha, \lambda)$ , lois gaussiennes.

Proposer de nombreux exemples de somme de variables indépendantes.

Dans certains cas, on a une propriété de stabilité : la loi de la somme est du même type.

Étudier notamment les cas de lois gaussiennes.

Dans ce cas, la densité de  $S$  est la fonction :

$$s \mapsto \sum_{u \in D_1} \mathbf{P}(X_1 = u) f_2(s - u).$$

Dans ce cas, la densité de  $S$  est la fonction

$$s \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u) f_2(s - u) du.$$

Cette fonction est appelée le produit de convolution des densités  $f_1$  et  $f_2$ .

## 7.2 Espérance, moments

*Il est recommandé de proposer ici de nombreux exercices sur des calculs d'espérances, de moments et de variances.*

Si  $X$  est une variable aléatoire réelle de densité  $f_X$ , on définit l'espérance de  $X$  par la formule

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt,$$

sous réserve de l'intégrabilité sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $t \mapsto t f_X(t)$ .

Propriété de transfert à une variable :

Si  $X$  est une variable aléatoire réelle continue, de densité  $f_X$ , alors la variable aléatoire  $Y = g(X)$  admet une espérance si, et seulement si, la fonction  $t \mapsto g(t) f_X(t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$ , si  $Y$  admet une espérance et si  $|X| \leq Y$  alors  $X$  admet une espérance.

Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.

Espérance d'un produit de variables aléatoires réelles indépendantes, sous réserve d'existence.

Moments, variance, écart-type, covariance :

Le moment d'ordre  $k \in \mathbb{N}^*$  de  $X$  est, sous réserve d'existence,  $\mathbf{E}(X^k)$ .

Si la variable aléatoire réelle  $X$  admet un moment d'ordre 2, on appelle variance de  $X$  la quantité  $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2)$  et écart-type de  $X$  la ra-

Espérance de variables aléatoires réelles de lois usuelles.

En cas d'intégrabilité, on a :

$$\mathbf{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_X(t) dt.$$

Exemples de recherche de l'espérance de  $Y = g(X)$  ; on évitera les exemples inutilement compliqués.

Résultat admis qui relève en fait de l'intégration de Lebesgue.

Si la variable aléatoire réelle  $X$  admet un moment d'ordre  $k \in \mathbb{N}^*$ , alors elle admet un moment d'ordre  $j$  pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$  ; de même la variable aléatoire réelle  $X + \alpha$  admet un moment d'ordre  $k$ , pour tout réel  $\alpha$ .

Dans ce cas on a :

- $\mathbf{V}(X) \geq 0$  et  $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2$  ;
- $\mathbf{V}(X) = 0 \Leftrightarrow X$  est constante presque partout ;

cine carrée de la variance :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2, alors :

- la variable aléatoire  $XY$  admet une espérance et  $E(XY)^2 \leq E(X^2) E(Y^2)$  (CAUCHY-SCHWARZ);
- $S = X + Y$  admet un moment d'ordre 2 et sa variance  $V(S)$  est donnée par la formule ci-contre.

Si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2, on définit la covariance du couple  $(X, Y)$  par la formule

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &= E(XY) - E(X) E(Y). \end{aligned}$$

Si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2 et si ces variables sont indépendantes, leur covariance est nulle.

Corrélation linéaire : si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2 de lois non certaines (i.e. variances non nulles), on définit le coefficient de corrélation linéaire du couple  $(X, Y)$  par la formule

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Si  $X$  admet un moment d'ordre 1, on appelle variable centrée associée à  $X$  la variable aléatoire réelle  $\tilde{X} = X - E(X)$ .

Si  $X$  admet un moment d'ordre 2, on appelle variable centrée réduite associée à  $X$  la variable aléatoire réelle  $X^* = \frac{1}{\sigma(X)}(X - E(X))$ .

- $V(X + \alpha) = V(X)$ , pour tout réel  $\alpha$ .

$$V(S) = V(X) + V(Y) + 2E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

Avec cette notation on obtient

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y).$$

La variance de la somme est alors la somme des variances.

La réciproque est fautive : covariance nulle n'implique pas indépendance.

Le coefficient de corrélation linéaire du couple  $(X, Y)$  est un élément de l'intervalle  $[-1, 1]$ .

Le cas  $\rho = 1$  équivaut à  $Y = \alpha X$  avec  $\alpha > 0$ ,

le cas  $\rho = -1$  équivaut à  $Y = \alpha X$  avec  $\alpha < 0$ .

L'indépendance de  $X$  et  $Y$  implique  $\rho = 0$ , la réciproque est fautive.

### 7.3 Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites

Inégalité de MARKOV : Si  $X$  est une variable aléatoire réelle positive admettant une espérance, alors, pour tout  $\alpha > 0$ ,

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}.$$

Cette inégalité permet de démontrer l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.

Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV : Si  $X$  est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2, alors, pour tout  $\beta > 0$ ,

$$P(|X - E(X)| \geq \beta) \leq \frac{V(X)}{\beta^2}.$$

Interprétation : la variance permet de contrôler l'écart entre  $X$  et sa valeur moyenne  $E(X)$ .

Inégalité de JENSEN : Si  $X$  est une variable aléatoire réelle admettant une espérance, si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une application convexe sur  $\mathbb{R}$  et si  $Y = f(X)$  admet une espérance, alors

$$f(E(X)) \leq E(f(X)).$$

Démonstration uniquement dans le cas où la loi de  $X$  est discrète.

Définition de la convergence en probabilité d'une suite  $(X_n)_n$  de variables aléatoires réelles vers une variable aléatoire réelle  $Y$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|Y - X_n| \geq \varepsilon) = 0.$$

Définition de la convergence en loi d'une suite  $(X_n)_n$  de variables aléatoires réelles vers une variable aléatoire réelle  $Y$  :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus D_Y, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(t) = F_Y(t),$$

où  $D_Y$  désigne l'ensemble des points de discontinuité de la fonction  $F_Y$ .

La convergence en probabilité implique la convergence en loi. La réciproque est fautive.

Loi faible des grands Nombres : si  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2, alors la suite  $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right)_{n \geq 1}$ , de variables aléatoires, converge en probabilité vers la variable constante  $\mu = \mathbf{E}(X_1)$ .

Théorème de la limite centrée : si  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2, alors la suite  $\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^n X_k - n\mu\right)\right)_{n \geq 1}$ , où  $\mu = \mathbf{E}(X_1)$  et  $\sigma = \sigma(X_1)$ , converge en loi vers la variable aléatoire suivant la loi gaussienne standard.

Si, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la suite  $(f_k(x))_k$  converge vers  $g(x)$ , alors la suite de variables aléatoires réelles  $(f_k(X))_k$  converge en probabilité vers  $g(X)$ .

En fait la limite d'une convergence en loi est la loi de  $Y$ .

Résultat admis.

Application : interprétation fréquentiste de  $\mathbf{P}(A)$ .

la vitesse de convergence de la loi des grands nombre est donc en  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

Ce théorème admet de nombreuses applications, notamment en statistiques; elles ne sont pas au programme.

# REFLECTURE

# Physique

## 1 Préambule

### 1.1 Objectifs de formation en physique

La réforme du programme de physique de la classe de deuxième année TSI est rendue nécessaire par l'évolution des contextes, scientifique, technique et pédagogique, sur le plan international. Elle permettra de réduire le décalage croissant entre la physique enseignée et la physique pratiquée telle qu'elle se manifeste en permanence via ses applications technologiques et numériques. Elle s'appuie sur les acquis déjà travaillés au secondaire qualifiant et en classe de première année TSI. Le programme de physique de la filière TSI vise à préparer les élèves de la deuxième année de classe préparatoire aux différents concours et à apporter les connaissances fondamentales indispensables à la formation générale d'un futur, ingénieur, enseignant ou chercheur.

La physique est une science à la fois théorique et expérimentale. Elle permet de découvrir l'Univers de l'infiniment petit jusqu'à l'infiniment grand en passant par les échelles intermédiaires de la vie de tous les jours. Son enseignement s'appuie sur une approche théorique mathématisée de la discipline et vise à élaborer des modèles, des plus simples aux plus complexes, qui seront confrontés à l'expérience. Ces deux composantes de la démarche scientifique s'enrichissent mutuellement et de façon cohérente. La formation dispensée au cours des deux années de préparation doit ainsi, dans une approche équilibrée entre théorie et expérience, apporter à l'élève les outils conceptuels et méthodologiques pour lui permettre de comprendre le monde naturel et technique qui l'entoure et de faire l'analyse critique des phénomènes étudiés. Les méthodes utilisées doivent encourager l'élève à devenir graduellement acteur de sa formation, qu'il comprenne mieux l'impact de la science et que, plus assuré dans ses connaissances, il soit préparé à poursuivre son cursus d'études dans les grandes écoles.

La démarche de modélisation occupe également une place centrale dans le programme pour former les élèves à établir, de manière autonome, un lien fait d'allers - retours entre le " monde " des objets, des expériences, des faits, et celui des modèles et des théories. L'enseignant doit rechercher un point d'équilibre entre des approches complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative. La construction d'un modèle passe aussi par l'utilisation maîtrisée des mathématiques dont un des fondateurs de la physique expérimentale, GALILEE, énonçait déjà qu'elles sont le langage dans lequel est écrit le monde.

L'enseignement de la physique est renforcé par une réhabilitation de la formation expérimentale des élèves à travers les travaux pratiques (TP) et les expériences de cours.

L'enseignement de la physique est enrichi par l'introduction d'*activités numériques* qui permettront d'aborder de nombreux champs de la discipline. L'introduction d'*activités numériques* dans le programme prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation. Ces activités offrent aux élèves la possibilité :

- ◆ d'effectuer une modélisation avancée du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires ;
- ◆ de réaliser un programme complet structuré allant de la prise en compte de données expéri-

mentales à la mise en forme des résultats permettant de résoudre un problème scientifique donné ;

- ◆ d'étudier l'effet d'une variation des paramètres sur le temps de calcul, sur la précision des résultats, sur la forme des solutions pour des programmes d'ingénierie numérique choisis ;
- ◆ d'utiliser les fonctions de l'environnement logiciel pour résoudre un problème scientifique mis en équation lors des enseignements de physique ;
- ◆ d'utiliser les fonctions de l'environnement logiciel pour afficher les résultats sous forme graphique ;
- ◆ de tenir compte des aspects pratiques comme l'impact des erreurs d'arrondi sur les résultats, le temps de calcul ou le stockage en mémoire.

Pour certains thèmes, les *activités numériques* à développer sont explicitement signalées en caractères gras italiques dans la colonne des commentaires du tableau des contenus thématiques. Deux *activités numériques* sont associées au thème *Mesures et incertitudes*. Elles définissent des savoir-faire numériques exigibles. Une simulation informatique en langage Python est requise. Dans ce cas, le professeur mettra à la disposition de ces élèves, un exemple de programme informatique écrit dans ce langage de programmation familier à l'élève en cours d'informatique. Les outils numériques développés pourront être largement appliqués lors des différentes activités d'enseignement et particulièrement lors des évaluations écrites et orales réalisées en classe.

Avec un code préalablement écrit, le professeur et l'élève pourront mettre en oeuvre les outils numériques :

- ◆ avant une activité pour la préparer : estimer une incertitude, ajuster des valeurs expérimentales, comparer des prévisions théoriques et des observations expérimentales, prolonger informatiquement l'expérience, préparer un exercice, réaliser une illustration (calcul, courbe, animation,...) ;
- ◆ pendant l'activité : faire un exercice, présenter une illustration... ;
- ◆ après l'activité : rédiger un compte-rendu

En plus des activités exigibles, on pourra utiliser l'outil informatique à chaque fois que celui-ci est susceptible d'apporter un gain de temps ou une meilleure illustration des enseignements. C'est ainsi qu'on pourra faire appel, selon les circonstances, à des logiciels de calcul formel et de représentation graphique, ou à des banques de données.

L'esprit de la démarche scientifique adoptée dans l'exécution du programme de physique, empreinte de rigueur et de sens critique permanent, doit permettre à l'élève, sur toute question du programme :

- ◆ de communiquer l'essentiel des résultats sous forme claire et concise, tant à l'oral qu'à l'écrit ;
- ◆ d'en analyser le caractère de pertinence : modèle utilisé, limites du modèle, influence des paramètres, homogénéité des formules, symétries, interprétation des cas limites, ordres de grandeur et précision ;
- ◆ d'en rechercher l'impact pratique ;
- ◆ de devenir graduellement acteur de sa formation, qu'il comprenne mieux l'impact de la science et que, plus assuré dans ses connaissances, il soit préparé à poursuivre son cursus d'études dans les grandes écoles.

## 1.2 Repères pour l'enseignant

Lors de la mise en application du programme et dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant organise son enseignement en respectant les principes directeurs suivants :

- ◆ privilégier la mise en activité des élèves en évitant tout dogmatisme ;
- ◆ adopter une progressivité dans la difficulté des exercices de travaux dirigés permettant ainsi aux élèves l'assimilation, l'entraînement et l'approfondissement ;

- ◆ permettre et encadrer l'expression par les élèves de leurs conceptions initiales ;
- ◆ valoriser l'approche expérimentale ;
- ◆ contextualiser les apprentissages pour leur donner du sens ;
- ◆ procéder régulièrement à des synthèses pour expliciter et structurer les savoirs et savoir-faire et les appliquer dans des contextes différents ;
- ◆ tisser des liens aussi bien entre les notions du programme qu'avec les autres enseignements, notamment les mathématiques, les génies, électrique et mécanique, et l'informatique, commun à tous les élèves de la voie TSI ;
- ◆ favoriser l'acquisition d'automatismes et développer l'autonomie et l'initiative des élèves en proposant des temps de travail personnel ou en groupe.

### 1.3 Communication à l'écrit et à l'oral

La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet à l'élève de développer les savoirs et les savoir-faire d'expression écrite. La qualité de la rédaction et de la présentation, ainsi que la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses élèves, entre les élèves eux-mêmes, doit également contribuer à développer des savoirs et des savoir-faire de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux élèves en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux pratiques ou de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer *la communication à l'écrit et à l'oral*. La communication utilise des moyens diversifiés : les élèves doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

### 1.4 Évaluation des élèves

L'évaluation des apprentissages en classes préparatoires se définit comme une démarche de collecte d'informations conduisant à un jugement sur la valeur du travail et du résultat d'un élève, par rapport aux objectifs d'une activité d'enseignement, en vue de prendre une décision quant au cheminement ultérieur de l'apprenant. C'est un acte pédagogique ; formatif et sommatif. Elle vise à mesurer le degré de maîtrise des savoirs et savoir-faire tels que définis par le programme et le niveau d'autonomie et d'initiative des élèves. L'élaboration d'une situation d'évaluation prévoit une progression dans les difficultés suffisamment large pour apprécier les différents niveaux des élèves. L'évaluation doit être établie en relation avec les objectifs de formation et les performances attendues des élèves. Il va de soi que les spécificités de la filière TSI doivent se retrouver dans le contenu des deux approches, théorique et expérimentale, ainsi que dans l'évaluation et le contrôle des connaissances. Les pratiques d'évaluation doivent respecter l'esprit des objectifs : tester l'aptitude de l'élève moins à résoudre les équations qu'à les poser, puis à analyser les résultats, tant dans leur caractère théorique que pratique.

### 1.5 Organisation des programmes

Le programme de physique est organisé en deux parties « Formation expérimentale » et « Contenus thématiques ».

Dans la première partie, sont décrits l'organisation de la formation expérimentale et les objectifs de cette formation que les élèves doivent développer et acquérir à la fin de l'année scolaire. La mise en oeuvre de la formation expérimentale doit s'appuyer sur des problématiques concrètes et clairement identifiées. Elles doivent être programmées par l'enseignant de façon à assurer un

apprentissage progressif de l'ensemble des connaissances et des savoir-faire attendus.

La seconde partie, intitulée *Contenu thématique*, est structurée autour de sept thèmes. Elle met en valeur les éléments clefs constituant l'ensemble des savoirs et des savoir-faire dont l'assimilation par les élèves est requise. Il est recommandé d'aborder les items de cette partie qui se prêtent à l'exercice, par une approche expérimentale démonstrative ou par une simulation numérique. L'expérience de cours démonstrative menée par l'enseignant pendant le cours éveillerait la curiosité des élèves et susciterait un questionnement actif et collectif, ce qui permettrait de faire évoluer la réflexion théorique et la modélisation. Le choix des thèmes des expériences de cours relève de l'initiative pédagogique et de la responsabilité du professeur.

Pour faciliter la progressivité des acquisitions, pour tenir compte des contraintes liées à la formation expérimentale et afin d'avoir une vision globale à l'échelle nationale, il est impératif de suivre la progression des sept thèmes de cette partie dans l'ordre suivant :

- I** électronique ;
- II** mécanique du solide ;
- III** électromagnétisme ;
- IV** physique des ondes ;
- V** thermodynamique ;
- VI** optique.

L'ordre d'exposition, au sein de chaque thème, relève bien sûr de la liberté pédagogique du professeur, cependant, il devra faciliter la progressivité des acquisitions.

Trois annexes sont consacrées :

- ◆ au matériel de physique nécessaire à la mise en oeuvre des programmes ;
- ◆ aux outils mathématiques et numériques que les élèves doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de physique à la fin de l'année de la classe de TSI.

## Formation expérimentale

La physique, à l'instar de toutes les sciences, est un entrelacement subtil de modèles théoriques et de validations expérimentales. Les travaux dirigés permettent aux élèves de s'entraîner et de mieux s'appropriier les concepts et techniques enseignés. Les travaux pratiques leur apportent quant à eux une compréhension plus concrète des phénomènes naturels et technologiques étudiés et développent leurs savoirs et savoir-faire expérimentaux. Ils permettent ainsi de tisser un lien étroit entre le réel et sa représentation et constituent pour les élèves un moyen d'appropriation de techniques, de méthodes, mais aussi de notions et de concepts.

D'un autre côté, l'activité expérimentale part d'un questionnement inscrit dans un cadre de réflexion théorique et conduit l'élève à analyser la tâche qui lui est demandée, à s'appropriier la problématique attachée, à envisager un protocole comportant des expériences, puis à le réaliser. L'élève est alors invité à porter un jugement critique sur la pertinence des résultats obtenus, ce qui permet de conclure quant à la validité des hypothèses formulées. Une séance de travaux pratiques doit comporter non seulement la manipulation proprement dite, mais aussi des temps de réflexion, de construction intellectuelle et d'échanges avec le professeur. C'est pourquoi ce dernier choisit les sujets d'étude plus en raison de leurs qualités formatrices que des phénomènes particuliers qui en constituent le support.

### 1 Objectifs de la formation expérimentale

Le programme de physique introduit les activités expérimentales avec deux principaux objectifs : un objectif d'éducation scientifique et d'apprentissage des principaux concepts qui permettent de comprendre le monde moderne en tant que citoyen éclairé et un objectif de préparation à l'évaluation des savoirs et savoir-faire expérimentaux acquis et par suite au monde professionnel. à ce propos, le programme de physique souligne l'importance :

- ◆ de la pratique expérimentale (travaux pratiques et expériences de cours) comme caractéristique des sciences physiques ;
- ◆ de l'acquisition des connaissances scientifiques et techniques de base (ordres de grandeur, schémas d'explication qualitative, modélisation, information sur le monde technique et les connaissances fondamentales en physique y compris les plus récentes) ;
- ◆ de l'entraînement à la manipulation, à l'observation, à la réalisation et à la représentation d'objets et de phénomènes ;
- ◆ de l'entraînement aux modes de raisonnement des sciences physiques, en essayant de présenter aux élèves l'interaction dialectique entre théorie et expériences ;

Effectués en binôme ou trinôme, les TP apprennent aux élèves :

- ◆ à se familiariser avec le matériel et à s'adapter à ses contraintes ;
- ◆ à réaliser des mesures et des acquisitions, à les commenter, les interpréter et les confronter à un modèle théorique ;
- ◆ à concevoir progressivement leurs propres protocoles expérimentaux afin de mettre en oeuvre une démarche leur permettant de réaliser les TP ; puis, plus tard, *s'approprier les concepts de la démarche scientifique durables et indispensables* à tous les futurs ingénieurs, chercheurs ou enseignants ;

La formation expérimentale des élèves est réalisée à travers deux composantes : les expériences de cours et les travaux pratiques. Ces deux composantes, complémentaires, ne répondent pas tout à fait aux mêmes objectifs :

- ◆ les expériences de cours démonstratives menées par l'enseignant pendant le cours suscitent un questionnement actif et collectif autour d'une situation expérimentale bien choisie permettant de faire évoluer la réflexion théorique et la modélisation, d'aboutir à des lois simplificatrices et unificatrices, de dégager des concepts transversaux entre différents domaines de la physique, de montrer aux élèves que «la théorie et l'expérience sont indissociablement liées» et enfin de mieux se situer par rapport aux objectifs de la leçon. Le choix des thèmes des expériences de cours relève de l'initiative pédagogique et de la responsabilité du professeur ;
- ◆ les travaux pratiques permettent, dans une approche contextualisée, suscitée par une problématique clairement identifiée et, chaque fois que cela est possible, transversale, l'acquisition de savoirs et savoir-faire techniques, de savoir dans le domaine de la mesure et de l'évaluation de sa précision, d'autonomie dans la mise en oeuvre de protocoles simples associés à la mesure des grandeurs physiques les plus souvent mesurées.

Afin d'améliorer la pratique expérimentale et rendre les apprentissages plus efficaces, il convient :

- ◆ de questionner les élèves avant, pendant et après le TP sur ce qu'ils sont en train de faire et surtout sur le pourquoi ;
- ◆ de faire usage d'un matériel sophistiqué (carte d'acquisition, oscilloscope numérique, spectromètre à fibre optique ...) de façon consciente et réfléchie. La mesure effectuée avec l'ordinateur, par exemple, ne doit pas se réduire à un presse-bouton. Les enjeux doivent être clairs pour les élèves ;
- ◆ d'être attentif aux exigences des élèves et à l'attendu des différentes évaluations. Ces exigences doivent être clairement motivées et non pas seulement dictées par la volonté de minimiser l'effort à fournir ;
- ◆ de varier le plus possible la typologie des TP. Par exemple, en alternant le fait d'exposer la théorie avant le TP ou laisser les élèves découvrir la théorie, en alternant entre un texte protocolaire et un bref texte les invitant à développer la mise en oeuvre expérimentale après une recherche documentaire.

Il est important de préciser par écrit, en préambule de l'énoncé de chaque TP, les objectifs et les savoir-faire visés et de ne pas manquer à en évaluer rapidement le degré de réalisation et de maîtrise à la fin de chaque étape ou la fin de la séance.

## 2 Organisation de la formation expérimentale

Cette partie précise les connaissances et les « savoir-faire » associés à la formation expérimentale des élèves et que ces derniers doivent acquérir dans le domaine de la mesure expérimentale et de l'évaluation des incertitudes des mesures. Elle aborde la question de la prévention du risque au laboratoire de physique-chimie. Elle précise aussi la liste des thèmes de travaux pratiques et fixe les objectifs de chaque thème. Elle souligne aussi l'importance de l'évaluation régulière des acquis des élèves inscrits dans le volet de la formation expérimentale.

Une liste de matériel, que les élèves doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice succincte, figure dans l'annexe « 1. Liste de matériel » du présent programme. Son placement en annexe du programme, et non à l'intérieur de la partie dédiée à la formation expérimentale, est délibéré : il exclut l'organisation de séances de travaux pratiques dédiées à un appareil donné et centrées seulement sur l'acquisition des compétences techniques associées.

## 2.1 Mesures et incertitudes

La notion d'incertitude est indispensable dans la démarche expérimentale. En effet, elle est nécessaire pour juger de la qualité d'une mesure ou de sa pertinence. Sans elle on ne peut examiner la compatibilité d'une mesure avec une loi physique. Ce thème intitulé «Mesures et incertitudes» vise à fournir les outils nécessaires à l'analyse de résultats expérimentaux.

Les élèves doivent avoir conscience de la variabilité des résultats obtenus lors d'un processus de mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type, en connaître les origines et les sources, estimer leur influence sur le résultat final, et comprendre et s'approprier ainsi les objectifs visés par l'évaluation des incertitudes. Ils détermineront ensuite ce qu'il faudrait faire pour améliorer la précision d'un résultat.

En fin, il est essentiel que les notions sur les mesures et incertitudes diffusent dans chacun des thèmes du programme, théoriques et expérimentaux, tout au long des deux années préparatoires et qu'elles soient régulièrement évaluées.

Le tableau ci-dessous explicite les savoir-faire exigibles sur le thème «mesures et incertitudes». Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

Contenu	Savoir-faire exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Notion d'incertitude. Incertitude-type. Erreur ; composante aléatoire et composante systématique de l'erreur. Incertitude-type A. Incertitude-type B. Propagation des incertitudes. Écart normalisé. Évaluation d'une incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale. Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée.
Incertitude-type composée. Incertitude élargie.	<i>Activité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.</i> Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Écriture du résultat d'une mesure. Chiffres significatifs. Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.

Régression linéaire.

Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle.

Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés.

*Activité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle*

RELIÈGE CITOYEN

## 2.2 Prévention du risque au laboratoire de physique et de chimie

*L'apprentissage et le respect des règles de sécurité dans les laboratoires et les salles de travaux pratiques visent d'une part à réduire les risques liés aux activités expérimentales et d'autre part à sensibiliser les élèves au respect de la législation ainsi qu'à l'impact de leur activité sur l'environnement. L'élève doit adopter une approche méthodique, prudente et soignée et se concentrer sur ce qu'il est en train de faire.*

*Des savoirs et des « savoir-faire » sont attachés au thème «Prévention du risque au laboratoire de physique et de chimie». Ils sont détaillés dans le tableau ci-dessous.*

### Notations et contenu

### Savoir-faire exigibles

#### 2.2.1. Prévention des risques au laboratoire

Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire.

Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.

##### Risque chimique

Règles de sécurité au laboratoire. Classes et catégories de danger. Pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques. Mentions de danger (H) et conseils de prudence (P). Fiches de sécurité.

Relever les indications sur le risque associé au prélèvement, au mélange et au stockage des produits chimiques et adopter une attitude responsable lors de leur utilisation.

##### Risque électrique

Le risque électrique comprend le risque de contact, direct ou non, avec une pièce nue sous tension, le risque de court-circuit, et le risque d'arc électrique. Ses conséquences sont l'électrisation, l'électrocution, l'incendie, l'explosion...

Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation d'appareils électriques.

##### Risque optique et électromagnétique

Les rayonnements optiques auxquels peuvent être exposés les élèves sont parfois nocifs pour les yeux et pour la peau. Une démarche de prévention adaptée permet de réduire les risques pour la santé et la sécurité.

Utiliser les sources laser et les diodes électroluminescentes de manière adaptée.

Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation des émetteurs d'ondes hyperfréquences.

##### Risque thermique

L'exposition à une ambiance thermique chaude ou la manipulation de corps chauds ou froids peut être à l'origine de brûlures ou de gelures localisées potentiellement graves.

#### Risque mécanique

Les risques mécaniques englobent la coupure, la lacération ou la piqûre, l'écrasement, le contact avec des machines.

#### Risque sonore

Le bruit au travail constitue une nuisance majeure et peut provoquer des surdités mais aussi stress et fatigue qui, à la longue, ont des conséquences sur la santé et la qualité du travail.

Adopter une attitude responsable lors de manipulations de corps chauds ou froids.

Adopter une attitude responsable lors de manipulations de dispositifs engageant des hautes ou des basses pressions ou lors de la conjonction d'un élément d'un montage et l'énergie d'un mouvement.

Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation des émetteurs d'onde infrasonores, sonores ou ultrasonores.

### 2.2.2. Prévention de l'impact environnemental

Traitement et rejet des espèces chimiques.

Adapter le mode d'élimination d'une espèce chimique ou d'un mélange en fonction des informations recueillies sur la toxicité ou les risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.

## 2.3 Thèmes de travaux pratiques et objectifs

La liste suivante est une proposition non exhaustive de thèmes des TP. *Le choix des sujets, des manipulations à réaliser et de la progression des TP (comme celui des expériences de cours) relève de l'initiative pédagogique et de la responsabilité du professeur* : les thèmes proposés par le programme sont purement indicatifs, ceux-ci peuvent être remplacés par tout thème à l'initiative du professeur et ne faisant appel qu'aux connaissances du programme de la classe. Cependant, leur contenu doit répondre aux objectifs fixés par le programme. Les connaissances et les savoir-faire expérimentaux développés à travers les objectifs des différents thèmes de travaux pratiques sont exigibles aux épreuves d'évaluation, écrites et expérimentales, en classe et éventuellement aux concours. Ils peuvent faire l'objet de questions aux épreuves écrites et orales. Rappelons qu'à travers les thèmes des travaux pratiques, il faudra procéder à l'évaluation des incertitudes types A et types B, à l'étude de leur propagation à l'aide d'un langage de programmation et à la présentation de la valeur numérique d'un résultat expérimental.

## 3 Électronique

**TP1** Utilisation d'une station d'acquisition et de traitement automatique des données

**TP2** Montages à amplificateur linéaire intégré (intégration, dérivation)

**TP3** Étude d'un filtre passe-bande accordable

**TP4** Effet d'un filtre linéaire sur un signal périodique

**TP5** TAnalyse spectrale d'un signal électronique

**TP6** Traitement numérique d'un signal, échantillonnage, filtrage numérique...

**TP7** Multiplication des signaux. Application à la modulation et la détection synchrone

**TP8** Conversion alternatif-continu

**TP9** Défauts et limitations des ALI réels

**TP10** Oscillateur auto-entretenu quasi sinusoïdal

**TP11** Oscillateurs de relaxation

- ◆ connaître des caractéristiques essentielles d'un appareil à l'aide de sa notice ou directement de l'appareil : impédance d'entrée, impédance de sortie, bande passante selon le cas ;
- ◆ maîtriser l'utilisation des instruments électroniques ;
- ◆ appréhender les conséquences des valeurs de la résistance d'entrée ou de sortie d'un appareil de mesure sur le fonctionnement d'un circuit ;
- ◆ mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'action d'un filtre sur un signal périodique ;
- ◆ visualiser un signal à l'aide de la carte d'acquisition ;
- ◆ comprendre et réaliser l'acquisition d'un signal périodique simple puis l'analyser par transformée de Fourier ;
- ◆ choisir de façon cohérente les paramètres (durée, nombre d'échantillons, fréquence d'échantillonnage) d'une d'acquisition numérique afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon ;
- ◆ produire un signal par multiplication de signaux ;
- ◆ mettre en œuvre la modulation d'amplitude ;
- ◆ décrire le spectre d'un signal modulé ;
- ◆ réaliser la démodulation d'amplitude par détection de crête ;
- ◆ confronter les résultats expérimentaux aux expressions théoriques ;
- ◆ déterminer rapidement le type de filtre étudié et de sa fréquence de coupure ;
- ◆ tracer le diagramme de Bode en gain et en phase ;
- ◆ obtenir la réponse d'un filtre à un signal créneau et à un signal triangulaire ;
- ◆ mettre en évidence le caractère intégrateur ou dérivateur d'un filtre dans son diagramme asymptotique ;
- ◆ identifier la présence de la rétroaction sur l'entrée inverseuse d'un amplificateur linéaire intégré comme un indice de stabilité du régime linéaire ;
- ◆ observer les limitations dues aux imperfections de l'amplificateur linéaire intégré : limitations en courant, en tension et en fréquence ;
- ◆ détecter, dans un montage à ALI, les manifestations de la vitesse limite de balayage et de la saturation de l'intensité du courant de sortie ;
- ◆ mettre en œuvre un convertisseur analogique/numérique et un traitement numérique afin de réaliser un filtre passe-bas ;
- ◆ utiliser un convertisseur numérique/analogique pour restituer un signal analogique ;
- ◆ mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre dû à l'échantillonnage lors de

l'utilisation d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition ;

- ◆ mettre en œuvre un oscillateur quasi-sinusoïdal et un oscillateur de relaxation ;
- ◆ analyser les spectres des signaux générés lors de la mise en œuvre d'un oscillateur ;

## 4 Optique

### TP12 Interférence et diffraction des ondes lumineuses

### TP13 Réglage et utilisation d'un spectrogoniomètre, spectroscopie à réseau

### TP14 Polarisation des ondes lumineuses

- ◆ éclairer un objet de manière adaptée ;
- ◆ optimiser la qualité d'une image ;
- ◆ mesurer une longueur sur un banc d'optique ;
- ◆ choisir une ou plusieurs lentilles en fonction des contraintes expérimentales ;
- ◆ utiliser des polariseurs et étudier quantitativement la loi de Malus
- ◆ mettre à profit les réglages concernant la lunette et le collimateur afin d'utiliser un goniomètre ;
- ◆ savoir mesurer un angle à l'aide du vernier d'un goniomètre ;
- ◆ étudier la déviation de la lumière par un réseau ;
- ◆ mettre en évidence le minimum de déviation ;
- ◆ mesurer une longueur d'onde optique ;
- ◆ procéder à l'évaluation des incertitudes-types B et leur propagation à l'aide d'un langage de programmation ;
- ◆ visualiser les spectres d'émission atomique du sodium, du mercure et de l'hydrogène ;
- ◆ déterminer un spectre à l'aide d'un spectromètre à fibre optique ;
- ◆ obtenir, observer et analyser quantitativement des figures d'interférences ;
- ◆ prendre conscience de la très forte sensibilité des méthodes interférométriques ;
- ◆ savoir réaliser un protocole de réglage en contrôlant les étapes successives ;
- ◆ mesurer la longueur d'onde d'une lumière monochromatique ;
- ◆ savoir utiliser une lame à retard ;
- ◆ mettre en œuvre des expériences utilisant un capteur photographique numérique ;
- ◆ réaliser un enregistrement à l'aide d'un capteur CCD.

## 5 Mécanique

### TP15 Étude d'oscillateurs mécaniques : pendule pesant, pendule de torsion

- ◆ étudier le mouvement oscillatoire d'un pendule mécanique ;
- ◆ mesurer la période d'oscillation en fonction de la longueur ;
- ◆ mettre en évidence le défaut d'isochronisme du pendule ;
- ◆ mesurer le moment d'inertie d'un solide en rotation et étudier sa variation quand on déplace les masses qui le constituent ;
- ◆ déterminer l'accélération de la pesanteur  $g$  ;

- ◆ réaliser l'acquisition expérimentale du portrait de phase d'un pendule pesant ;
- ◆ mettre en évidence une diminution de l'énergie mécanique ;
- ◆ effectuer une mesure d'un coefficient de frottement ;
- ◆ mesurer un couple de frottement.

## 6 Thermodynamique

### TP16 Changement d'état d'un corps pur

### TP17 Mesures calorimétriques : mesure d'une capacité thermique et d'une chaleur latente

### TP18 Conduction thermique : étude de la propagation de la chaleur dans des barres métalliques - Détermination d'une conductivité thermique

### TP19 Étude d'une machine thermique cyclique ditherme

- ◆ tracer les isothermes d'un gaz ;
- ◆ tracer le diagramme  $Pv$  ; lors d'un changement de phase et exploiter les graphiques obtenus afin de déterminer un point critique, une chaleur latente de vaporisation, et de visualiser le domaine de validité du modèle des gaz parfaits ;
- ◆ mettre en œuvre un capteur de pression ;
- ◆ mesurer une pression ;
- ◆ distinguer le caractère différentiel ou absolu du capteur de pression ;
- ◆ mettre en œuvre un capteur de température : thermomètre, thermistance, ou capteur infrarouge ;
- ◆ mesurer une température ;
- ◆ mesurer une capacité thermique ;
- ◆ mesurer une enthalpie de changement d'état ;
- ◆ comparer expérimentalement les conductivités thermiques de quelques matériaux ;
- ◆ classer les matériaux selon leurs propriétés isolantes,
- ◆ étudier la propagation de la chaleur dans des barres métalliques ;
- ◆ mesurer la conductivité thermique d'un matériau ;
- ◆ étudier une machine thermique cyclique ditherme ;
- ◆ analyser le cycle thermodynamique d'une machine thermique ;
- ◆ faire un bilan énergétique ;
- ◆ tracer le cycle parcouru par le réfrigérant sur le diagramme enthalpique ou le diagramme de Clapeyron ;
- ◆ calculer un rendement ou une efficacité ;

## 7 Physique des ondes

### TP20 Ondes électromagnétiques centimétriques en propagation libre

- ◆ étudier l'émission, la polarisation, la propagation et la réception d'une onde électromagnétique dans le domaine des ondes centimétriques (ou micro-ondes) ;

- ◆ mettre en oeuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique, dans le domaine des ondes centimétriques
- ◆ mettre en évidence une polarisation rectiligne : identifier, à l'aide d'un polariseur, une onde polarisée rectilignement et déterminer sa direction de polarisation ;
- ◆ réaliser des expériences de goniométrie, de diffraction et d'interférences aux échelles de longueur d'onde des hyperfréquences ;
- ◆ tracer un diagramme d'antenne.

## 8 Compte-rendu

La séance de travaux pratiques donne lieu à une synthèse écrite comportant, sous forme succincte, l'indication et l'exploitation des résultats. à cet égard on attache de l'importance à leur présentation graphique. L'utilisation d'un ordinateur, soit pour l'acquisition et le traitement de données expérimentales, soit pour comparer les résultats des mesures aux données théoriques, évite des calculs longs et répétitifs et favorise le tracé de courbes. Si les élèves sont appelés à utiliser d'autres appareils, toutes les indications nécessaires doivent leur être fournies.

Il est impératif d'exiger de l'élève la rédaction d'un compte-rendu pendant une séance de travaux pratiques. Cette aptitude constitue un des objectifs de la formation scientifique. Les activités expérimentales sont aussi l'occasion de travailler l'expression orale lors d'un point de situation ou d'une synthèse finale par exemple. Le but est de bien préparer les élèves de CPGE à la présentation des travaux et projets qu'ils auront à conduire et à exposer aux épreuves orales et au cours de leur formation en école d'ingénieur et, plus généralement, dans le cadre de leur métier de chercheur ou d'ingénieur.

L'élève doit rédiger dans son cahier, au fur et à mesure, un compte-rendu :

- ◆ définissant les objectifs du thème de travaux pratiques ;
- ◆ précisant la problématique préalablement définie ;
- ◆ expliquant les choix expérimentaux effectués et les techniques de mesure utilisées ;
- ◆ comprenant les mesures effectuées, et les courbes tracées et visualisées, les photos des écrans d'appareil de mesure ou de visualisation et précisant bien les choix des paramètres de mesure (amplitudes, fréquences, calibres, etc.) ;
- ◆ interprétant les différentes courbes et mesures en relation avec les résultats théoriques fournis.

Si l'intérêt du compte-rendu est évident, en revanche il faut veiller à ce qu'il ne prenne pas une importance considérable, en temps, par rapport au travail expérimental proprement dit.

D'autre part, les différentes activités pratiques doivent être couronnées par l'évaluation *hebdomadaire et trimestrielle* des savoir et savoir-faire expérimentaux, Lors de cette évaluation, il faudrait bien expliciter les distinctions entre savoirs et savoir-faire, et entre savoir-utiliser et savoir mettre en oeuvre.

## Contenus thématiques

Chaque thème du programme de physique comporte une introduction spécifique indiquant les objectifs de formation et les domaines d'application. Elle est complétée par un tableau en deux colonnes qui identifient, d'une part, les notions et contenus à connaître, et donc exigible, d'autre part, des commentaires ainsi que les activités numériques et expérimentales supports de la formation. Les activités numériques sont identifiées en *caractères gras italiques*; le langage de programmation conseillé est le *langage Python*. Les thèmes des *activités numériques* sont choisis de manière à représenter la diversité des applications possibles. Le professeur veillera à ce qu'une concertation régulière avec l'enseignant d'informatique soit développée autour de l'exécution de ces activités.

Le programme a été rédigé et abondamment commenté, avec le souci majeur de faciliter la transition entre l'enseignement secondaire et le système des classes préparatoires. Pour atteindre ce but, il a été jugé indispensable :

- ◆ d'introduire progressivement les outils et les méthodes de l'enseignement de physique post-baccalauréat sur des situations conceptuelles aussi proches que possible de celles qui ont été rencontrées au lycée ; en évitant, quand c'est possible, l'emploi d'outils mathématiques non encore maîtrisés, liés à des concepts physiques nouveaux ;
- ◆ de coordonner entre les enseignements de mathématiques, sciences industrielles, informatique, physique et chimie utilisant des outils souvent communs, pour faciliter le travail d'assimilation des élèves. Ceci rejette tout cloisonnement des enseignements scientifiques et suppose au contraire une concertation étroite au sein de l'équipe pédagogique ;
- ◆ de valoriser l'approche expérimentale des phénomènes pour stimuler chez l'élève une attitude active et créatrice, favorisant l'appropriation des connaissances et le développement d'un certain savoir faire manuel. Les travaux pratiques (TP) et les expériences de cours sont les temps forts de cette valorisation ;
- ◆ de valoriser l'approche numérique afin de permettre aux élèves de mettre en oeuvre leurs connaissances en informatique dans le cadre de l'étude d'une application en physique.

Les intitulés de chapitre sont très classiques, de façon que les acquis des élèves soient clairement identifiés.

### Table des matières avec horaires indicatifs

<b>Électrocinétique</b>	<b>(20h) 55</b>
Traitement d'un signal périodique par un système linéaire	(8h) 55
Étude de quelques oscillateurs électroniques permanents	(4h) 56
Électronique numérique	(4h) 56
Modulation et démodulation d'amplitude	(4h) 57
<b>Mécanique</b>	<b>(6h) 58</b>
Mécanique du solide	(6h) 59
<b>Thermodynamique</b>	<b>(10h) 60</b>
Diagramme de phase des fluides réels purs	61
Thermodynamique d'un fluide en écoulement permanent dans une conduite	(6h) 61
Transfert d'énergie par conduction thermique	(4h) 63

<b>Électromagnétisme</b>	<b>(18h) 64</b>
Formulation locale des lois de l'électromagnétisme en régime statique	(6h) 65
Action d'un champ magnétique sur un courant	65
Induction électromagnétique et conversion électromécanique	(6h) 65
Équations de MAXWELL	(4h) 67
Énergie électromagnétique	(2h) 67
<b>Physique des ondes</b>	<b>(8h) 68</b>
Propagation du champ électromagnétique dans une région sans charges ni courants	(4h) 68
Réflexion sous incidence normale d'une onde électromagnétique sur un conducteur parfait	(4h) 69
<b>Optique</b>	<b>(12h) 69</b>
Modèle scalaire des ondes lumineuses	(2h) 69
Interférences des ondes lumineuses	(6h) 70
Étude du réseau plan	(4h) 71

## 1 Électrocinétique

Ce thème renforce et complète l'étude des circuits électriques menée en première année. Il permet d'aborder l'étude du traitement d'un signal périodique par un système linéaire et celle des oscillateurs. Ces différentes thématiques sont illustrées à l'aide de l'amplificateur linéaire intégré (ALI) considéré comme un outil permettant des réalisations expérimentales variées. Les composants au programme de seconde année TSI sont les mêmes que ceux du programme de première année. En particulier, aucune connaissance particulière sur les diodes et les diodes Zener ne peut être exigée. Afin de compléter l'approche analogique des circuits électriques, un module à vocation expérimentale est consacré au traitement numérique des signaux à travers les sujets suivants :

- ◆ la conversion analogique numérique ;
- ◆ l'échantillonnage et le repliement de spectre ;
- ◆ le filtrage numérique.

La composante expérimentale est très forte dans cette partie et les savoir-faire expérimentaux exigibles ont vocation à être principalement développées au cours de séances de travaux pratiques. Les objectifs généraux de cette partie sont :

- ◆ exploiter un développement en série de Fourier fourni par un formulaire pour prévoir son évolution à travers un système linéaire ;
- ◆ comprendre le rôle central de la linéarité des systèmes pour interpréter la forme du signal de sortie et relier linéarité et superposition ;
- ◆ relier les représentations, temporelle et fréquentielle d'un signal ;
- ◆ effectuer quelques opérations de traitement du signal en électronique analogique et numérique ;
- ◆ illustrer expérimentalement la condition de NYQUIST-SHANNON ;
- ◆ expliquer et mettre en oeuvre un filtrage numérique.

### 1.1 Traitement d'un signal périodique par un système linéaire

Composition en fréquence d'un signal périodique. On fait remarquer qu'un signal possède une représentation dans l'espace des temps et une dans le Théorème de FOURIER. Valeur moyenne, valeur

efficace, fondamental et harmoniques. Spectre d'un signal périodique.

Effet d'un filtre du premier ou du second ordre sur la composition spectrale d'un signal périodique; utilisation de la fonction de transfert; filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande.

Caractère intégrateur ou dérivateur dans un domaine limité de fréquences.

l'espace des fréquences.

On attribue aux différentes harmoniques le rôle qu'elles jouent dans la forme du signal analysé.

On insiste sur l'intérêt de l'étude de la réponse d'un système linéaire à un signal sinusoïdal entamée en première année et on dégage l'importance du critère de linéarité du système. L'utilisation, en TP, des moyens numériques d'analyse harmonique permet des comparaisons immédiates entre fonction de transfert et représentation spectrale d'une réponse du système. On illustre en travaux pratiques cet effet.

On illustre quantitativement ces différents comportements.

## 1.2 Étude de quelques oscillateurs électroniques permanents

*Cette partie s'intéresse à une étude non exhaustive des oscillateurs en électronique. Les exemples sont choisis à l'initiative du professeur et les calculs des fonctions de transfert des filtres ne constituent pas un objectif de formation. En travaux pratiques, on complète l'étude par une analyse spectrale des signaux.*

### Oscillateur quasi-sinusoïdal :

Oscillateur quasi-sinusoïdal réalisé en bouclant un filtre du deuxième ordre avec un amplificateur.

Cette étude est menée en utilisant les notions d'électrocinétique de première année.

On exprime les conditions théoriques (gain et fréquence) d'auto-oscillation sinusoïdale d'un système linéaire bouclé.

On analyse sur l'équation différentielle l'inégalité que doit vérifier le gain de l'amplificateur afin d'assurer le démarrage des oscillations. On interprète le rôle des non-linéarités dans la stabilisation de l'amplitude des oscillations.

On vérifie, en travaux pratique, la distorsion harmonique des signaux par une analyse spectrale.

*Activité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, simuler l'évolution temporelle d'un signal généré par un oscillateur.*

### Oscillateur de relaxation :

Oscillateur de relaxation associant un intégrateur et un comparateur à hystérésis :

Générateur de signaux non sinusoïdaux, triangulaires et carrés, contrôle de la fréquence et du rapport cyclique.

On décrit les différentes séquences de fonctionnement d'un oscillateur de relaxation, on exprime les conditions de basculement et on détermine la période d'oscillation.

On analyse, en travaux pratiques, le spectre des signaux générés.

## 1.3 Électronique numérique

*L'avènement et les performances toujours croissantes des calculateurs électroniques ont conduit à vouloir manipuler les signaux issus de capteurs, non plus sous forme analogique mais sous une forme dite numérique ou numérisée, manipulable par ces calculateurs.*

Cette partie, à vocation expérimentale, aborde la question du traitement numérique du signal dans le prolongement du programme de première année. Elle est principalement étudiée de manière expérimentale et constitue une initiation au traitement numérique des signaux à travers les points suivants : l'échantillonnage et le repliement de spectre, les conversions analogique/numérique et numérique/analogique et le filtrage numérique. Le phénomène de repliement de spectre est expliqué qualitativement au moyen d'illustrations démonstratives, l'objectif étant de mettre en place la condition de NYQUIST-SHANNON afin de réaliser convenablement une acquisition numérique en vue d'une analyse spectrale. Un filtrage numérique, du type passe-bas, est réalisé à l'aide d'un convertisseur analogique/numérique (CAN) et d'un traitement numérique, un convertisseur numérique/analogique (CNA) restitue ensuite un signal de sortie analogique.

Afin de mettre en évidence d'autres effets associés à l'échantillonnage, on réalise de manière comparative un filtre analogique passe-bas et un filtre numérique remplissant la même fonction. Ce dernier est réalisé à l'aide d'une chaîne de traitement : CAN, algorithme numérique, CNA. On étudie expérimentalement l'influence de la fréquence d'échantillonnage.

Signal analogique et signal numérique. Schéma synoptique de traitement d'un signal analogique.

Échantillonnage.

Analyse spectrale numérique : choix des paramètres (durée, nombre d'échantillons, fréquence d'échantillonnage) d'une acquisition numérique afin de respecter la condition de NYQUIST-SHANNON. Théorème de NYQUIST-SHANNON.

Structure du spectre du signal obtenu après échantillonnage. Repliement du spectre.

Filtrage numérique.

Restitution d'un signal analogique.

On explique de façon qualitative les diverses transformations que l'on fait subir à un signal analogique pour le rendre manipulable par un calculateur : échantillonnage, quantification et codage.

On réalise en travaux pratiques, l'échantillonnage d'un signal. On commente la structure du spectre du signal obtenu après échantillonnage et on montre l'influence de la fréquence d'échantillonnage.

On met en évidence le phénomène de repliement de spectre provoqué par l'échantillonnage lors de l'utilisation d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition.

On présente une étude comparative d'un filtre analogique passe-bas et d'un filtre numérique remplissant la même fonction.

On met en oeuvre, en travaux pratiques, un convertisseur analogique/numérique et un traitement numérique afin de réaliser un filtre passe-bas.

On explique comment restituer le signal analogique à l'aide d'un filtre passe-bas. On met en oeuvre, en travaux pratiques, un convertisseur numérique/analogique pour restituer un signal analogique.

Activité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, simuler un filtrage numérique et visualiser son action sur un signal périodique.

## 1.4 Modulation et démodulation d'amplitude

La problématique de la transmission d'un signal temporel codant une information est abordée dans l'étude et la réalisation d'une modulation, en relation avec la partie du programme consacrée à la propagation des ondes électromagnétiques et le traitement du signal. Dans un premier temps, on fait une présentation sommaire du multiplieur analogique puis on aborde l'aspect théorique de la modulation et de la démodulation. Les aspects expérimentaux du sujet sont traités en travaux pratiques.

Fonction multiplication analogique : schéma et relation de fonctionnement.

La fonction multiplication analogique concerne un multiplieur analogique réalisant la fonction :

$$v_s(t) = k.v_{e1}(t) \times v_{e2}(t)$$

Multiplication d'un signal par une constante.  
Multiplication d'un signal sinusoïdal par lui-même.  
Multiplication de deux signaux sinusoïdaux différents.

On précise les caractéristiques du signal de sortie : amplitude, fréquence et valeur moyenne.

Dans le cas de la multiplication de deux signaux sinusoïdaux différents, on distingue les deux cas : fréquences voisines et fréquences très différentes. En travaux pratiques, on fait l'analyse spectrale du signal de sortie et on fait remarquer la non-linéarité du composant multiplieur.

Transmission d'un signal codant une information variant dans le temps.  
Intérêt de la modulation.

On définit un signal modulé en amplitude, en fréquence, en phase.

On explique l'intérêt de la modulation dans la transmission des signaux.

On donne des ordres de grandeur des fréquences utilisées pour les signaux radio AM, FM, la téléphonie mobile.

Modulation d'amplitude à l'aide d'un multiplieur analogique, taux de modulation.

On interprète le signal modulé comme le produit d'une porteuse par une modulante et on décrit le spectre d'un signal modulé.

Démodulation d'amplitude :

- ▶ Démodulation par détection d'enveloppe.
- ▶ Démodulation synchrone.

On justifie la nécessité d'utiliser une opération non linéaire.

On fait constater l'influence du taux de modulation sur la démodulation d'amplitude.

On explique le principe de la détection synchrone. On réalise en travaux pratiques une démodulation synchrone.

## 2 Mécanique

Le programme de mécanique de deuxième année TSI vise à compléter les acquis de mécanique du cours de première année TSI. Il est structuré en trois parties consacrées à la mécanique du solide. Le but est de savoir mener l'étude du mouvement d'un solide en translation ou en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen. Dans ce dernier cas, on fait remarquer que tout point du solide décrit un cercle autour de l'axe avec une même vitesse angulaire  $\omega$  et on explicite la vitesse de chaque point en fonction de  $\omega$  et de la distance à l'axe de rotation.

La partie cinématique est une approche de la cinématique du solide, limitée aux cas de la translation et de la rotation autour d'un axe fixe. Dans ce dernier cas, il s'agit simplement de définir le mouvement en remarquant que tout point du solide décrit un cercle autour de l'axe avec une même vitesse angulaire  $\omega$  et d'expliciter la vitesse de chaque point en fonction de  $\omega$  et de la distance à l'axe de rotation.

L'étude des lois de COULOMB, limitée au seul cas de la translation, permet de mettre en oeuvre un mode de raisonnement spécifique et particulièrement formateur, sans pour autant omettre les conséquences expérimentales.

L'étude générale d'un mouvement composé d'une translation dans un référentiel galiléen et d'une rotation autour d'un axe fixe dans le référentiel barycentrique ne figure pas au programme.

L'étude du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe gardant une direction fixe dans un référentiel galiléen mais pour lequel l'axe de rotation ne serait pas fixe est exclue.

Cette partie se termine par l'étude d'un système déformable pour souligner le rôle des forces intérieures dans le bilan énergétique d'un système.

Les lois de la mécanique des systèmes sont formulées pour les systèmes fermés. Aucune connaissance ne peut être exigée sur la mise en oeuvre de ces lois pour un système ouvert. Les théorèmes généraux sont déduits des lois de NEWTON.

L'enseignement de la mécanique du solide est également dispensé par le professeur de génie mécanique. L'étude des systèmes articulés de plusieurs solides est exclusivement abordée en génie mécanique. On veillera à harmoniser le vocabulaire entre les deux disciplines.

Les objectifs généraux de cette partie sont :

- ◆ conduire de manière autonome l'étude d'un problème avec ou sans frottement solide : définir un système, choisir un référentiel d'étude éventuellement non galiléen en évaluant les avantages et les inconvénients de ce choix, choisir un système de repérage, procéder à un bilan complet des forces appliquées, choisir une méthode de mise en équations lorsque plusieurs méthodes sont possibles ;
- ◆ effectuer un bilan énergétique en mécanique ;
- ◆ identifier et utiliser des grandeurs conservatives ;
- ◆ utiliser divers outils (discussions graphiques, résolution analytique, résolution numérique) pour discuter les solutions de la ou des équations différentielles modélisant l'évolution temporelle d'un système ;
- ◆ faire apparaître et exploiter des analogies : circuit RLC en électrocinétique, pendule pesant aux " petits " angles.

## 2.1 Mécanique du solide

### Cinématique du solide et des solides en contact

Définition d'un solide.

Centre de masse ou d'inertie d'un solide.

Champ de vitesse d'un solide.

Mouvements de translation et de rotation autour d'un axe fixe.

On différencie un solide d'un système déformable.

Les théorèmes de GULDIN sont hors programme.

Il s'agit de faire une approche de la cinématique du solide, limitée aux cas de la translation et de la rotation autour d'un axe fixe.

### Modélisation des efforts entre solides en contact

Contact de deux solides.

Lois phénoménologiques de COULOMB relatives au frottement de glissement dans le seul cas d'un solide en translation.

Puissance totale des actions de contact.

Modèle des liaisons parfaites.

Les frottements de roulement et de pivotement sont hors programme.

On exploite les lois de COULOMB dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage.

On distingue entre les actions extérieures et intérieures au système matériel de deux solides en contact ponctuel.

On précise dans le cas d'une liaison pivot, même parfaite, que les actions de liaison ne peuvent pas en général être représentées par une seule force rencontrant l'axe.

### Dynamique du solide

Quantité de mouvement totale ou résultante cinétique d'un solide.

Théorème de la résultante cinétique.

Loi de conservation de la quantité de mouvement pour un système isolé.

On souligne le lien avec la deuxième loi de NEWTON vue en première année.

Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe. Théorème d'HUYGENS	L'opérateur d'inertie est hors programme. La démonstration du théorème d'HUYGENS est hors programme. On se limite à la définition et à l'utilisation du moment d'inertie. Tout calcul de moment d'inertie est hors programme.
Moment d'une force par rapport à un axe orienté. Couple. Liaison pivot. Notions simples sur les moteurs ou freins dans les dispositifs rotatifs. Mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen : moment cinétique, théorème du moment cinétique scalaire, énergie cinétique, théorème de l'énergie cinétique, équation horaire du mouvement. Lois de conservation du moment cinétique et de l'énergie mécanique pour un système isolé. Pendule pesant : équation du mouvement, analogie avec l'équation de l'oscillateur harmonique.	On définit un couple de forces, le moment d'un couple. On définit la liaison pivot. On justifie le moment que la liaison pivot peut produire. Le mouvement d'un solide ne peut pas faire intervenir plus d'un degré de liberté de rotation. Toute étude de l'équilibrage statique ou dynamique d'un solide en rotation est hors programme.
Système déformable. Théorème de l'énergie cinétique pour un système déformable.	A l'aide d'une acquisition expérimentale du portrait de phase d'un pendule pesant, on précise la bifurcation entre un mouvement pendulaire et un mouvement révolutif, on met en évidence le non-isochronisme des oscillations et une diminution de l'énergie mécanique. On prend en compte le travail des forces intérieures. On réalise le bilan énergétique du tabouret d'inertie.

### 3 Thermodynamique

Cette partie s'intéresse à l'étude des machines industrielles avec ou sans changement d'état, en appliquant les deux principes de la thermodynamique aux fluides en écoulement permanent. Elle permet ainsi une révision du cours de première année. On l'aborde essentiellement à travers la mise en oeuvre de bilans d'énergie.

Des notions de base de mécanique des fluides sont également introduites. L'objectif est de décrire les écoulements simples de fluides dans les machines thermiques en évoquant les phénomènes de perte de charge et le rôle de la viscosité. L'approche se fonde exclusivement sur la notion de bilan macroscopique : toute formulation locale de la mécanique des fluides, notamment à l'aide d'opérateurs vectoriels, est exclue.

Enfin, on aborde la conduction thermique à l'aide de bilans infinitésimaux, la loi de NEWTON étant introduite pour faire le lien avec la thermodynamique industrielle.

Les objectifs généraux de cette partie sont :

- ◆ établir et comprendre les allures des courbes dans les diagrammes thermodynamiques ;
- ◆ définir une surface de contrôle afin de réaliser des bilans de grandeurs extensives ;
- ◆ utiliser des diagrammes et des tables thermodynamiques des fluides réels.

Toute notion de thermodynamique statistique est hors programme.

### 3.1 Diagramme de phase des fluides réels purs

*Cette partie constitue l'occasion de réinvestir les notions de thermodynamique différentielle vues en première année. On y exploite également des diagrammes de fluides réels afin d'habituer les élèves à ne pas se limiter à des situations " idéales " (gaz parfait, etc.). On rappelle les principes de la thermodynamique sous forme différentielle. Dans le but d'unifier la présentation en physique et en chimie, les identités thermodynamiques sont introduites dans le cas d'un système de composition variable. Toute étude générale de la notion de potentiel thermodynamique est hors-programme.*

Notion générale sur le changement de phase solide-liquide-gaz.

La formule de CLAPEYRON est hors programme.

Potentiel thermodynamique. Fonction enthalpie libre.

On justifie que l'enthalpie libre est un potentiel thermodynamique adapté à l'étude des transformations isothermes, isobares et spontanées.

Identités thermodynamiques pour un système fermé de composition variable. Potentiel chimique. Condition d'équilibre.

On rappelle les expressions des différentielles de l'énergie interne et de l'enthalpie et on établit l'expression de la différentielle de l'enthalpie libre.

On distingue les éventuels caractères intensif ou extensif des variables utilisées.

On écrit les principes et les identités thermodynamiques par unité de masse du système.

On exprime l'enthalpie libre d'un système en fonction des potentiels chimiques.

Diagramme de phase. Diagramme (P, T) : pression et température de coexistence. Point triple. Point critique.

Enthalpie et entropie associées à une transition de phase : enthalpie de fusion, enthalpie de vaporisation, enthalpie de sublimation.

On donne des ordres de grandeur d'enthalpies massiques de vaporisation.

Variation des fonctions d'état (U, H, S et G) lors d'un changement de phase.

On réalise des bilans énergétiques en prenant en compte des transitions de phases.

Relation entre les variations d'entropie et d'enthalpie associées à une transition de phase :

$$\Delta h_{12} = T \Delta s_{12}$$

Cas de l'équilibre liquide-vapeur : diagrammes de CLAPEYRON ( $P, v$ ), entropique ( $T, s$ ) et enthalpique (des frigoristes), courbe de saturation, isothermes d'ANDREWS, paliers de changement d'état, vapeur sèche, vapeur saturante, liquide saturant, titre massique en vapeur, enthalpie et entropie massique du système diphasique, règle des moments.

On représente, pour chaque diagramme, l'allure des courbes isothermes, isobares, isochores, isentropiques, isenthalpiques. Ces courbes sont établies dans la limite du gaz parfait, dans la limite du liquide incompressible et indilatable.

Exploitation d'un diagramme pour déterminer une grandeur physique.

### 3.2 Thermodynamique d'un fluide en écoulement permanent dans une conduite

*On introduit le point de vue eulérien pour l'étude des écoulements. Il s'agit de décrire simplement un écoulement en identifiant des tubes de courant sur lesquels des bilans pourront ensuite être effectués. On pourra faire le lien avec la signification physique des opérateurs rotationnel et divergence introduits dans le cours d'électromagnétisme.*

*Dans cette partie, on effectue aussi des bilans énergétiques dans une conduite. On se place dans un premier temps dans le cadre de la dynamique des fluides parfaits. Toute utilisation de l'équation d'EULER ou de NAVIER-STOKES est exclue. On établit la relation de BERNOULLI, puis on prend en compte les pertes de charge dans les conduites. On initie à ce sujet les étudiants à la lecture d'abaques. Dans un second temps, on tient compte des transferts thermiques pour exprimer les principes de la thermodynamique pour un système en écoulement.*

### 3.2.1. Description d'un fluide en écoulement permanent dans une conduite

Grandeurs eulériennes. Régime stationnaire.	On décrit localement les propriétés thermodynamiques et mécaniques d'un fluide à l'aide des grandeurs intensives pertinentes.
Lignes et tubes de courant. Caractère divergent ou rotationnel d'un écoulement.	On déduit le caractère divergent ou rotationnel d'un écoulement à l'aide d'une carte de champ de vitesse fournie.
Débit massique. Conservation de la masse. Débit volumique.	On justifie l'intérêt d'utiliser le débit volumique pour l'étude d'un fluide incompressible en écoulement.

### 3.2.2. Énergétique des fluides en écoulement laminaire stationnaire dans une conduite

Fluides parfaits. Fluides newtoniens : notion de viscosité.	On caractérise un fluide parfait par un profil de vitesse uniforme dans une même section droite.
Conditions aux limites du champ de vitesse d'un fluide dans une conduite.	On relie l'expression de la force surfacique de cisaillement au profil de vitesse.
Ordre de grandeur de la viscosité de gaz et de liquides (air, eau et lubrifiants).	On lie qualitativement l'irréversibilité d'un écoulement à la viscosité.
Bilan de grandeurs énergétiques extensives. Conservation de l'énergie mécanique pour des systèmes ouverts et fermés.	On définit un volume et une surface de contrôle stationnaire.
Bilan d'énergie pour un fluide parfait, relation de BERNOULLI. Cas d'un fluide incompressible.	On établit un bilan d'énergie pour un circuit hydraulique ou pneumatique avec ou sans pompe. On établit la relation de BERNOULLI pour un fluide parfait, incompressible en écoulement stationnaire. Cas particulier $v = 0$ , statique des fluides - relation de PASCAL, densité volumique des forces pressantes.
Perte de charge singulière et régulière.	On modifie la relation de BERNOULLI afin de tenir compte de la dissipation d'énergie mécanique par frottement.
Travail indiqué $w_i$ massique d'une machine. Bilan d'énergie.	On définit le travail indiqué comme la somme des travaux autres que ceux des forces de pression d'admission et de refoulement et on le relie à la présence de parties mobiles.
Puissance mécanique utile (ou indiquée) et puissance thermique reçues par le fluide à la traversée d'une machine.	
Premier et second principes appliqués à un système en écoulement permanent unidimensionnel d'un système à une entrée et une sortie :	L'un des objectifs est de savoir lire et utiliser les tables de données thermodynamiques et les diagrammes lors de l'étude des cycles industriels.
$\Delta h + \Delta e_c + \Delta(gz) = w_i + q_e$	On se limite aux systèmes à une entrée et à une sortie.
$\Delta s = s_{ech} + s_{cre}$	
$dh + de_c + d(gz) = \delta w_i + \delta q_e$	La notion de travail massique de transvasement est hors programme.
$\delta s = \delta s_{ech} + \delta s_{cre}$	
Application aux systèmes : compresseur, déten-	On mentionne la distinction entre le diagramme

deur, échangeur, tuyère.

de WATT et le diagramme de CLAPEYRON.

On associe l'entropie massique créée aux causes d'irréversibilité de fonctionnement de la machine. La connaissance des diagrammes  $(T, s)$ ,  $(P, h)$  (MOLIER) est exigible.

### 3.2.3. Thermodynamique industrielle

*Cette partie permet un approfondissement du cours de première année, par l'étude de cycles industriels. On se limite à des calculs dans le cadre du modèle du gaz parfait ou à l'utilisation des diagrammes d'état si le fluide est réel. Aucune connaissance relative à la technologie des installations ou aux différents types de cycles n'est exigible.*

#### Étude de quelques dispositifs d'une installation industrielle

Compresseur et turbine calorifugés.

On établit et on exploite la variation d'enthalpie massique pour une transformation réversible.

Échangeur thermique calorifugé.

On établit et on exploite la relation entre les puissances thermiques reçues par les deux écoulements dans l'échangeur.

Détendeur calorifugé (laminage).

On établit et on exploite la nature isenthalpique de la transformation.

#### Cycles industriels

Moteurs, réfrigérateurs, pompes à chaleur.

Pour une machine dont les éléments constitutifs sont donnés, on repère les sources thermiques, le sens des échanges thermiques et mécaniques.

Définition et expression du rendement, de l'efficacité ou du coefficient de performance de la machine.

On définit le rendement ou l'efficacité d'une machine par le rapport de la puissance utile sur la puissance coûteuse.

Ordres de grandeur de puissances thermique et mécanique mises en jeu pour différentes tailles de dispositifs.

On étudie un exemple de cycle thermique industriel avec ou sans changement d'état.

## 3.3 Transfert d'énergie par conduction thermique

*Cette partie aborde l'étude de la conduction thermique dans les solides. On se limite à l'étude de problèmes à une dimension en coordonnées cartésiennes.*

Les modes de transfert thermique d'énergie : conduction, convection et rayonnement.

Flux thermique. Vecteur densité de flux thermique.

On donne des ordres de grandeur de la conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, verre, acier...

Conductivité thermique.

Toute modélisation microscopique de la loi de FOURIER est hors programme.

Loi de FOURIER relative à la conduction thermique.

On établit, à l'aide du premier principe appliqué à un volume élémentaire, l'équation de la diffusion thermique en se limitant à des problèmes unidimensionnels en géométrie cartésienne. On généralise ensuite à une géométrie quelconque.

Bilan d'énergie thermique.

Équation de la diffusion thermique sans terme de source.

Irréversibilité du phénomène de diffusion thermique.

Généralisation de l'équation de la diffusion en présence d'un terme de source.

On relie le temps et la longueur caractéristiques d'un phénomène de diffusion au coefficient de diffusion par une analyse dimensionnelle.

*Activité numérique : à l'aide d'un langage de pro-*

Conduction thermique en régime permanent, conductance et résistance thermiques.

Analogie électrique dans le cas du régime stationnaire.

Conditions aux limites : continuité du flux thermique, continuité de la température pour un contact thermique parfait, loi de NEWTON. Coefficient de transfert thermique de surface  $h$ .

*grammation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'EULER explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.*

On signale les analogies avec le calcul des conductances électriques et des capacités de condensateurs.

Seule la mémorisation de l'expression de la résistance thermique d'un barreau rectiligne unidimensionnel est exigible.

On souligne et on exploite l'analogie entre les lois phénoménologiques d'OHM et de FOURIER.

Les transferts thermiques à l'interface entre un fluide et une paroi solide sont décrits par l'expression phénoménologique

$$\varphi = h(T_{\text{paroi}} - T_{\text{fluide}})$$

, appelée loi de NEWTON.

## 4 Électromagnétisme

L'enseignement de l'électromagnétisme s'inscrit dans le prolongement de celui de première année. Il aborde trois régimes :

- ◆ le régime statique : l'électrostatique et la magnétostatique, abordées en première année et complétées par une approche locale en deuxième année.
- ◆ le régime lentement variable : l'induction électromagnétique dans le cadre de l'ARQP.
- ◆ le régime variable quelconque : propagation des ondes électromagnétiques intégrée dans la partie physique des ondes.

L'étude de l'électrostatique et de la magnétostatique n'est pas centrée sur les calculs mais sur les propriétés des champs ; aucune technicité mathématique n'est recherchée dans les calculs. Ces derniers ne concernent que des situations proches du cours et d'intérêt pratique évident. En revanche, on insiste sur la comparaison des propriétés respectives de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

Le formalisme quadridimensionnel, la transformation relativiste des champs, le vecteur excitation électrique  $\vec{D}$  et le vecteur excitation magnétique  $\vec{H}$  sont exclus.

Les objectifs généraux de cette partie sont :

- ◆ maîtriser le concept de champ scalaire et de champ de vecteurs et manipuler les opérateurs vectoriels relatifs aux champs scalaires et vectoriels ;
- ◆ citer quelques ordres de grandeur ;
- ◆ énoncer les lois de l'électromagnétisme sous formes locale et intégrale et faire le lien entre les deux formulations ;
- ◆ évaluer les actions d'un champ magnétique extérieur sur un circuit parcouru par un courant ou par analogie sur un aimant ;
- ◆ analyser qualitativement les systèmes où les phénomènes d'induction sont à prendre en compte ;
- ◆ effectuer des bilans énergétiques ;
- ◆ connaître des applications relevant du domaine de l'industrie ou de la vie courante où les phénomènes d'induction sont présents et déterminants dans le fonctionnement des dispositifs.

## 4.1 Formulation locale des lois de l'électromagnétisme en régime statique

Densité de charge et vecteur densité volumique de courant électrique.

Formulations intégrale et locale de la conservation de la charge électrique.

Forme locale de la conservation de la circulation du champ électrostatique. Forme locale du théorème de GAUSS.

Équations de POISSON, équations de LAPLACE.

Forme locale de la conservation du flux du champ magnétostatique.

Forme locale du théorème d'AMPÈRE.

On établit l'équation locale de la conservation de la charge en coordonnées cartésiennes dans le cas à une dimension et on la généralise à trois dimensions.

On traite des exemples simples de calcul du champ et du potentiel par les équations locales.

On admet la forme de la solution de l'équation de POISSON en précisant les conditions de validité.

On fait remarquer la non-unicité du potentiel électrostatique.

On exprime par analogie l'équation de POISSON dans le cas de la gravitation

## 4.2 Action d'un champ magnétique sur un courant

*Les forces de LAPLACE dans un circuit mobile sont introduites dans le cas d'un champ uniforme et stationnaire, soit dans le modèle des rails de LAPLACE, soit dans celui d'un cadre rectangulaire en rotation.*

*L'objectif de cette partie est d'évaluer les actions d'un champ magnétique extérieur sur un circuit parcouru par un courant ou par analogie sur un aimant représenté par un moment magnétique.*

Force de LORENTZ.

Force de LAPLACE. Moment des forces de LAPLACE.

Rails de LAPLACE dans un champ magnétique extérieur uniforme, stationnaire et orthogonal aux rails.

Travail des forces de LAPLACE sur un circuit indéformable : flux coupé. Théorème de MAXWELL.

### Applications :

- rails de LAPLACE dans un champ magnétique extérieur uniforme, stationnaire et orthogonal aux rails.
- spire rectangulaire, parcourue par un courant, en rotation autour d'un axe de symétrie de la spire passant par les deux milieux de côtés opposés et placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire orthogonal à l'axe.

Action d'un champ magnétique extérieur uniforme sur un aimant. Positions d'équilibre et stabilité.

Création d'un mouvement de rotation.

La densité volumique de la force de LAPLACE  $\vec{j} \wedge \vec{B}$  est simplement affirmée.

On établit l'expression de la résultante et on évalue la puissance des forces de LAPLACE s'exerçant sur la barre conductrice en translation rectiligne sur les deux rails parallèles.

Le calcul des actions à partir du flux ou de l'énergie magnétique est hors programme.

On calcule la résultante et la puissance des forces de LAPLACE s'exerçant sur la barre conductrice en translation rectiligne sur les deux rails parallèles. On calcule le couple et la puissance des actions mécaniques de LAPLACE s'exerçant sur la spire.

On modélise l'aimant par un dipôle magnétique permanent.

On étudie l'effet d'un champ magnétique tournant sur un dipôle magnétique permanent.

## 4.3 Induction électromagnétique et conversion électromécanique

*Dans cette partie, on cherche à mettre l'accent sur les applications relevant du domaine de l'industrie ou de la vie courante où les phénomènes d'induction, reposant sur la loi de FARADAY, sont présents et déterminants dans le fonctionnement des dispositifs. Elle s'appuie sur les nombreuses applications*

présentes dans notre environnement immédiat : boussole, moteur électrique, alternateur, transformateur, haut-parleur, plaques à induction, frein électromagnétique, carte RFID (Radio Frequency Identification)...

Cette partie se prête parfaitement à une introduction expérimentale et constitue un bel exemple d'illustration de l'histoire des sciences. On évoque, à ce sujet, les différents points de vue possibles sur le même phénomène selon le référentiel dans lequel on se place. L'étude d'un circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps aborde le phénomène d'auto-induction puis le couplage par mutuelle inductance entre deux circuits fixes. Elle traite du modèle du transformateur de tensions. L'étude d'un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire est centrée sur la conversion de puissance. Des situations géométriques simples permettent de dégager les paramètres physiques pertinents afin de modéliser, par exemple, un dispositif de freinage.

### Flux d'un champ magnétique :

Flux d'un champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour orienté (courbe fermée orientée).

### Lois d'induction électromagnétique :

Conservation du flux magnétique

Loi de FARADAY

Courant induit par le déplacement relatif d'une boucle conductrice par rapport à un aimant ou un circuit inducteur. Sens du courant induit. Force électromotrice induite, loi de FARADAY :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Loi de modération de LENZ.

Production et transport de l'énergie électrique.

Ordres de grandeur de la puissance consommée ou produite par une lampe, un téléviseur, un radiateur électrique, une éolienne, un barrage, une centrale nucléaire.

Conversion de puissance mécanique en puissance électrique.

Rails de LAPLACE.

Freinage par induction.

Conversion de puissance électrique en puissance mécanique.

Haut-parleur électrodynamique, principe de fonctionnement.

Moteur à courant continu à entrefer plan. Principe de fonctionnement.

Auto-induction : flux propre et inductance propre. Inductance mutuelle entre deux bobines.

On réalise des expériences de cours pour illustrer les lois de LENZ et de FARADAY.

On utilise la loi de LENZ pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.

On réalise des expériences de cours pour illustrer la loi de LENZ.

On utilise la loi de LENZ pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.

On précise la signification physique du signe (-) dans la loi de FARADAY.

On explique le principe d'une chaîne de production et de transport d'énergie électrique.

On fait remarquer sur cet exemple que dans le cas d'un champ magnétique permanent la puissance de la force électromotrice induite est opposée à la puissance des forces de LAPLACE.

On explique l'origine des courants de FOUCAULT et on donne des exemples d'utilisation.

On explique le principe de fonctionnement d'un moteur à courant continu à entrefer plan en utilisant les forces de LAPLACE.

On détermine l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en "in-

Expression de la densité volumique d'énergie magnétique.

Induction mutuelle entre deux circuits filiformes fermés.

Circuits électriques à une maille couplés par le phénomène de mutuelle induction en régime sinusoïdal forcé.

Transformateur de tension parfait.

Énergie magnétique d'un ensemble de deux circuits filiformes fermés indéformables et fixes : expression en fonction des intensités des courants et des coefficients d'inductance.

Convertisseurs électromécaniques :

- Moteur à courant continu, machine synchrone, machine asynchrone.
- Pilotage des moteurs par action sur certains paramètres électriques.

fluence totale".

On établit le système d'équations en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents.

On établit les lois des tensions.

L'expression de l'énergie magnétique en fonction de  $\vec{j}$  et  $\vec{A}$  est hors programme.

On décrit qualitativement les principes des machines.

On explique les avantages et inconvénients des différentes machines et on donne des exemples d'utilisation.

On effectue un bilan énergétique.

#### 4.4 Équations de MAXWELL

*Les équations de MAXWELL sont introduites comme des postulats de l'électromagnétisme. Elles permettent une première approche quantitative du phénomène de propagation et, également, d'établir le lien avec le cours sur l'induction électromagnétique étudiée précédemment. Aucun modèle relatif à la loi d'OHM locale n'est exigible.*

Formulations, intégrale et locale de la conservation de la charge.

On établit l'équation locale de la conservation de la charge électrique dans le cas unidimensionnel et on admet la généralisation.

Équations de MAXWELL dans le vide : formulations locale et intégrale. Interprétation.

On évoque le problème de la nature du référentiel par rapport auquel les équations de MAXWELL sont postulées et on insiste sur le contenu physique de ces équations.

Cas de l'approximation des régimes quasi-permanents (ARQP) ou quasi-stationnaires (ARQS). Limite de validité.

Équations de MAXWELL dans le cadre de l'ARQP.

Cas du régime stationnaire

On se limite à écrire les équations de MAXWELL en régime stationnaire.

Relations entre les composantes du champ électromagnétique de part et d'autre d'une interface (relations de passage).

On indique que les relations de passage admises se substituent aux équations de MAXWELL dans le cas d'une modélisation surfacique.

#### 4.5 Énergie électromagnétique

*Cette partie s'intéresse à l'aspect énergétique de l'électromagnétisme. On met l'accent sur les échanges d'énergie entre la matière et le champ électromagnétique, sur la signification physique du vecteur de POYNTING, sur l'utilisation du flux du vecteur de POYNTING pour évaluer une puissance rayonnée à travers une surface et sur les bilans d'énergie et de puissance.*

Densité volumique de force électromagnétique.	On présente la forme locale de la loi d'OHM comme une loi phénoménologique.
Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.	La justification microscopique n'est pas exigible.
Cas particulier d'un conducteur ohmique. Loi d'OHM locale, densité volumique de puissance JOULE.	
Expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique.	On affirme l'expression de la densité d'énergie électromagnétique sur les exemples du condensateur plan et d'un solénoïde infini.
Vecteur de POYNTING.	On affirme la signification physique du vecteur de POYNTING.
Bilan d'énergie électromagnétique : équations intégrale et locale de conservation de l'énergie électromagnétique (identité de POYNTING).	

## 5 Physique des ondes

L'étude de la propagation des ondes électromagnétiques limitée au vide, peut être étendue, à l'occasion d'exercices ou de problèmes, à un conducteur métallique (effet de peau, absorption) et à un plasma dilué (dispersion).

Toute étude de propagation d'ondes mécaniques (corde vibrante ou onde sonore) est exclue.

Les objectifs généraux de cette partie sont :

- ◆ comprendre le rôle joué par une équation différentielle dans l'étude de l'évolution temporelle d'un système physique ;
- ◆ relier linéarité et superposition ;
- ◆ interpréter physiquement et savoir reconnaître la forme analytique d'un signal qui se propage ;
- ◆ relier conditions aux limites et quantification, conditions aux limites et décomposition en ondes stationnaires ;

### 5.1 Propagation du champ électromagnétique dans une région sans charges ni courants

*L'étude de la propagation des ondes électromagnétiques permet d'illustrer l'efficacité du formalisme local des équations de MAXWELL en insistant sur les aspects qualitatifs et sur la variété des applications qui en découlent. Elle aborde également quelques aspects énergétiques associés à la propagation d'une onde plane dans l'espace vide de charge et de courant sont abordés. Les échanges d'énergie entre la matière et le champ électromagnétique ne sont pas étudiés.*

*La réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait et son confinement dans une cavité permettent aux élèves d'aborder la notion d'onde stationnaire et de découvrir des savoir-faire spécifiques permettant leur étude efficace.*

Équations de propagation des champs dans une région sans charges ni courants.	On souligne le caractère idéal du modèle de l'onde plane harmonique et on montre simplement (grâce à l'analyse de FOURIER) qu'une telle onde constitue une composante élémentaire d'un paquet d'ondes.
Onde plane. Solutions de l'équation de d'ALEMBERT à une dimension cartésienne. Structure de l'onde plane progressive. Aspects énergétiques.	On associe des applications à chaque domaine du spectre des ondes électromagnétiques.
Cas particulier de l'onde plane monochromatique (harmonique ou sinusoidale).	
Domaines spectraux et applications des ondes élec-	

tromagnétiques.

Dispersion, relation de dispersion, vitesse de phase, vitesse de groupe.

Exemple d'états de polarisation d'une onde plane progressive et monochromatique : polarisation circulaire et polarisation rectiligne.

Polariseurs rectilignes.

Les polariseurs et les lames à retard sont introduits de façon simple en travaux pratiques.

## 5.2 Réflexion sous incidence normale d'une onde électromagnétique sur un conducteur parfait

Conducteur parfait. Relation de passage du champ électromagnétique à l'interface vide-conducteur parfait.

Réflexion sous incidence normale d'une onde électromagnétique plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait.

Onde stationnaire.

Applications aux cavités à une dimension cartésienne. Mode d'onde stationnaire. Condition de quantification des solutions.

On limite l'étude à celle des champs de l'onde réfléchie et de l'onde stationnaire.

On établit l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies.

On interprète qualitativement la présence de courants localisés en surface.

On traite l'effet de peau dans un exercice.

On utilise la méthode de séparation des variables.

## 6 Optique

On se restreint au domaine d'approximation où une description par des ondes scalaires est suffisante. Le théorème de MALUS-DUPIN, outil nécessaire à l'étude de l'optique ondulatoire, est admis.

Toute étude générale de la cohérence est exclue.

Les objectifs généraux de cette partie sont :

- ◆ maîtriser la notion de phase d'une vibration harmonique et de sa variation au cours d'une propagation ;
- ◆ associer les caractéristiques géométriques d'un phénomène d'interférences (position et forme des franges, interfrange) à celles du dispositif interférentiel et du milieu de propagation ;
- ◆ connaître certains ordres de grandeur propres aux phénomènes lumineux dans le domaine du visible (longueur d'onde, temps de cohérence, temps de réponse d'un récepteur) ; faire le lien avec les problèmes de cohérence ;
- ◆ maîtriser les outils de l'optique géométrique (rayon lumineux, loi du retour inverse, relations de conjugaison) et de l'optique ondulatoire (chemin optique, surface d'onde, théorème de MALUS-DUPIN) afin de conduire un calcul de différence de marche entre deux rayons lumineux dans des situations simples.

### 6.1 Modèle scalaire des ondes lumineuses

*Cette partie introduit les outils nécessaires pour décrire les phénomènes d'interférences et de diffraction. Le programme utilise le mot " intensité " pour décrire la grandeur détectée mais on peut utiliser indifféremment les mots " intensité " ou " éclairement " sans chercher à les distinguer à ce niveau. L'intensité lumineuse est introduite comme une puissance par unité de surface. Le théorème de*

*MALUS-DUPIN est admis.*

Modèle scalaire des ondes lumineuses.  
Chemin optique le long d'un rayon lumineux.  
Déphasage dû à la propagation.

On admet qu'une onde lumineuse peut être décrite par une onde scalaire.  
On exprime le retard de phase en un point (par rapport à un autre) en fonction de la durée de propagation ou du chemin optique.

Surfaces d'onde (ou équiphasés).  
Onde plane, onde sphérique ; effet d'une lentille mince sur une onde dans l'approximation de GAUSS.  
Théorème de MALUS-DUPIN.  
DéTECTEURS optiques.  
ÉCLAIREMENT ou intensité lumineuse.  
DENSITÉ spectrale.

On admet qu'une onde lumineuse monochromatique peut être décrite par une onde scalaire progressive, composante du champ électrique, qui se propage le long du rayon lumineux.

On exprime le retard de phase en un point (par rapport à un autre) en fonction de la durée de propagation ou du chemin optique.

On définit les surfaces d'ondes relatives à une source ponctuelle S par l'ensemble des points M tels que  $(SM) = \text{constante}$ .

On associe une description de la formation des images en termes de rayon lumineux et en termes de surfaces d'onde.

On précise la propriété énonçant que le chemin optique séparant deux points conjugués est indépendant du rayon lumineux choisi.

Le théorème de MALUS-DUPIN est admis.

On définit les surfaces d'ondes relatives à une source ponctuelle S par l'ensemble des points M tels que  $(SM) = \text{constante}$ .

On donne l'ordre de grandeur du temps de réponse de quelques récepteurs de lumière et on évoque leurs conséquences sur la détection des signaux lumineux.

## 6.2 Interférences des ondes lumineuses

### 6.2.1. Interférences non localisées de deux ondes totalement cohérentes

*Dans cette partie, les trous d'YOUNG permettent de confronter théorie et expérience. Les fentes d'YOUNG peuvent être abordées mais de manière exclusivement expérimentale. Aucune connaissance sur un autre diviseur du front d'onde n'est exigible.*

Superposition de deux ondes lumineuses.

Cohérence mutuelle. Notions de trains d'ondes.  
Conditions d'interférences.

Formule de FRESNEL :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi)$$

Diviseurs d'ondes. Champ d'interférence, surfaces d'égale intensité, frange d'interférence, différence de marche, ordre d'interférence, facteur de contraste (ou visibilité) de la figure d'interférences. Relation (admise) entre la durée des trains d'ondes et la largeur spectrale.

On justifie l'additivité des intensités lors de la superposition de deux ondes incohérentes entre elles. L'étude générale de la cohérence (cohérence partielle, cohérence spatiale...) est hors programme.

On compare les prévisions théoriques et les réalités expérimentales et on affirme une méthode opérationnelle pour superposer deux ondes lumineuses cohérentes mettant en oeuvre les notions de trains d'ondes, de sources synchrones, de diviseur d'ondes et de longueur de cohérence.

On donne l'ordre de grandeur du temps de cohérence de quelques radiations visibles.

Applications : trous d'YOUNG ponctuels dans un milieu non dispersif : source à distance finie et observation à grande distance finie et à l'infinie. Perte de contraste par élargissement angulaire de la source.

On justifie que les franges ne sont pas localisées. On compare expérimentalement les deux dispositifs, trous d'YOUNG et fentes d'YOUNG, en mettant en évidence les analogies et les différences.

L'étude de tout dispositif utilisant des lentilles et/ou des prismes (miroirs de FRESNEL, bilentilles de BILLET, de MESLIN, biprisme de FRESNEL...) peut être faite en travaux dirigés.

On montre l'équivalence, du point de vue chemin optique, de ces dispositifs avec celui des trous d'YOUNG.

On affirme et on utilise le critère semi-quantitatif de brouillage des franges  $\Delta p \geq 1/2$  (où  $\Delta p$  est évalué sur la moitié de l'étendue spatiale de la source) pour interpréter des observations expérimentales.

### 6.3 Étude du réseau plan

*Dans cette partie, la formule de FRESNEL, admise en classe de première année, est démontrée. L'étude de la superposition de  $N$  ondes cohérentes ne doit pas donner lieu à des développements calculatoires.*

Superposition de  $N$  ondes quasi monochromatiques cohérentes entre elles, de même amplitude et dont les phases sont en progression arithmétique. Relation fondamentale des réseaux.

On établit l'expression de la différence de marche entre deux motifs consécutifs.

On établit la relation fondamentale des réseaux liant la condition d'interférences constructives à la valeur de la différence de marche entre deux motifs consécutifs.

On établit, à l'aide du diagramme de FRESNEL, la demi-largeur  $2\pi/N$  des pics principaux de la courbe d'intensité en fonction du déphasage.

Le calcul de l'intensité lumineuse est hors programme.

Diffraction à l'infini

Diffraction à l'infini

On décrit qualitativement l'influence de la diffraction (On utilise la relation  $\theta \approx \lambda/d$  entre l'échelle angulaire du phénomène de diffraction et la taille caractéristique de l'ouverture).

Minimum de déviation dans un ordre donné.

On souligne qualitativement l'intérêt expérimental du minimum de déviation.

Dispersion par le réseau dans un ordre donné : spectre d'ordre  $p$ .

On interprète les positions des raies observées comme résultant d'une condition d'interférences constructives.

Pouvoir dispersif d'un réseau.

On définit le pouvoir dispersif d'un réseau en comparant différents réseaux.

Pouvoir de résolution. Critère de RAYLEIGH.

On définit le pouvoir de résolution et on indique les facteurs qui le limitent :

- pouvoir séparateur du détecteur ;
- influence de la diffraction.

# Annexes

## 1 Liste du matériels

Le standard national du matériel des CPGE donne la liste globale et détaillée du matériel nécessaire à la mise en oeuvre du programme de physique et chimie en ces classes.

Le tableau ci-dessous donne le matériel nécessaire à la mise en oeuvre des programmes et que les élèves doivent savoir utiliser lors d'une évaluation pratique avec l'aide d'une notice simplifiée. Une utilisation de matériel hors de cette liste lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'instructions appropriées et d'une introduction guidée suffisamment détaillée.

Domaine	Matériel
1. Électronique	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ oscilloscope numérique</li> <li>■ carte d'acquisition et logiciel dédié</li> <li>■ générateur de signaux électrique Basse Fréquence avec modulation interne en fréquence et sortie d'une tension image de la fréquence</li> <li>■ alimentation stabilisée en tension</li> <li>■ multimètre numérique</li> <li>■ multiplieur analogique</li> <li>■ microcontrôleur</li> </ul>
2. Mécanique	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ capteur de force</li> <li>■ accéléromètre</li> <li>■ stroboscope</li> <li>■ webcam avec logiciel dédié</li> <li>■ appareil photo numérique ou caméra numérique</li> <li>■ pendule simple et pendule pesant</li> </ul>
3. Thermodynamique	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ capteur de pression</li> <li>■ caméra thermique</li> <li>■ thermomètre</li> <li>■ thermocouple</li> <li>■ thermistance</li> <li>■ capteur infra-rouge</li> <li>■ calorimètre</li> <li>■ machines thermiques dithermes</li> </ul>
4. Électromagnétisme	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ émetteur et récepteur d'ondes électromagnétiques</li> </ul>
5. Ondes	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ émetteur et récepteur d'ondes électromagnétiques</li> <li>■ émetteur et récepteur acoustique (domaine audible et domaine ultrasonore)</li> </ul>
6. Optique	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ goniomètre</li> <li>■ viseur à frontale fixe</li> <li>■ lunette auto-collimatrice</li> </ul>

- spectromètre à fibre optique
- laser à gaz et diode laser
- sources de lumière spectrales
- source de lumière blanche à condenseur

## 2 Outils mathématiques pour la physique

*L'utilisation d'outils mathématiques est indispensable en sciences physiques. La capacité à mettre en oeuvre de manière autonome certains de ces outils mathématiques dans le cadre des activités relevant de la physique fait partie des compétences exigibles à la fin de la première année. Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que le niveau de maîtrise attendu en fin de première année. Il est complété dans le programme de seconde année. Cependant les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité sont traitées à l'aide d'outils numériques (calculatrices, logiciels de calcul numérique).*

### Programme

### Savoir-faire mathématiques exigibles

#### Équations algébriques :

Systèmes linéaires de  $n$  équations à  $p$  inconnues.

Identifier les variables (inconnues) nécessaires à la modélisation du problème sous forme d'un système d'équations linéaires. On donne l'expression formelle des solutions dans le seul cas  $n = p = 2$ .

Équations non linéaires.

Représenter graphiquement une équation de la forme  $f(x) = g(x)$  et on interprète graphiquement la ou les solutions.

#### Équations différentielles linéaires et non linéaires :

Équations différentielles linéaires à coefficients constants. Identifier l'ordre d'une équation différentielle.

Identifier l'ordre d'une équation différentielle.

Forme canonique.

Mettre l'équation sous forme canonique.

Mettre l'équation sous forme canonique.

Trouver la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène).

Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants :

Trouver l'expression des solutions lorsque  $f(x)$  est constante ou de la forme  $A \cos(\omega t + \varphi)$  (en utilisant la notation complexe).

$$y' + ay = f(x)$$

Utiliser l'équation caractéristique pour trouver la solution générale de l'équation sans second membre.

Équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants :

Prévoir le caractère borné ou non de ses solutions (critère de stabilité).

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Autres équations différentielles d'ordre 1 ou 2.

Trouver l'expression des solutions lorsque  $f(x)$  est constante ou de la forme  $A \exp(\lambda x)$  avec  $\lambda$  complexe. Trouver la solution de l'équation complète correspondant à des conditions initiales données.

Exemples d'équations différentielles non linéaires

Représenter graphiquement cette solution.

Obtenir une intégrale première d'une équation de Newton  $x'' = f(x)$  et l'exploiter graphiquement. Séparer les variables d'une équation du premier ordre à variables séparables.

Faire le lien entre les conditions initiales et le graphe de la solution correspondante.

#### Fonctions :

Fonctions usuelles.

Dérivée. Dérivée d'une fonction composée. Dérivée temporelle d'une fonction, notation  $dx/dt$

Développement limité d'une fonction d'une variable au voisinage d'une valeur de la variable. Formule de TAYLOR à l'ordre un ou deux ; interprétation graphiquement

Primitive et intégrale. Valeur moyenne. Représentation graphique d'une fonction.

Exponentielle, logarithme népérien et décimal, cosinus, sinus, tangente, puissance réelle  $(1+x)^\alpha$  Utiliser la formule de TAYLOR à l'ordre un ou deux ; interpréter graphiquement.

Connaître et utiliser les développements limités à l'ordre 1 des fonctions  $(1+x)^\alpha$ ,  $\ln(1+x)$  ;  $\exp(x)$  ; et à l'ordre 2 des fonctions  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$

Interpréter l'intégrale comme une somme de contributions infinitésimales, en lien avec la méthode des rectangles en mathématiques.

Exprimer la valeur moyenne sous forme d'une intégrale. Connaître la valeur moyenne sur une période des fonctions  $\cos(x)$  ;  $\sin(x)$  ;  $\cos^2(x)$  et  $\sin^2(x)$

Déterminer un comportement asymptotique ; rechercher un extremum local.

Utiliser des échelles logarithmiques ; identifier une loi de puissance à une droite en échelle log-log.

### Équations aux dérivées partielles :

Exemples d'équations aux dérivées partielles : équation de LAPLACE, équation de diffusion, équation de d'ALEMBERT.

Identifier une équation aux dérivées partielles connue.

Transposer une solution familière dans un domaine de la physique à un autre domaine.

Obtenir des solutions de forme donnée par substitution.

Utiliser des conditions initiales et des conditions aux limites.

### Calcul différentiel :

Différentielle d'une fonction de plusieurs variables.

Dérivée partielle.

Théorème de SCHWARZ.

Savoir écrire l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles. Identifier la valeur d'une dérivée partielle, l'expression de la différentielle étant donnée. Utiliser le théorème de SCHWARZ (admis).

### Géométrie dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Vecteurs et système de coordonnées.

Projection d'un vecteur et produit scalaire, interprétation géométrique.

Produit vectoriel, interprétation géométrique.

Produit mixte.

Notions de dérivée temporelle d'un vecteur dans un référentiel donné.

Transformations géométriques, symétries par rapport à un plan, translations et rotations de l'espace.

Courbes planes.

Courbes planes paramétrées.

Longueurs, aires et volumes classiques.

Barycentre d'un système de points.

Exprimer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Utiliser les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques. Interpréter géométriquement le produit scalaire et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée.

Utiliser la bilinéarité et le caractère symétrique du produit scalaire.

Interpréter géométriquement le produit vectoriel et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée directe.

Utiliser la bilinéarité et le caractère antisymétrique du produit vectoriel.

Faire le lien avec l'orientation des trièdres.

Utiliser les symétries par rapport à un plan, les translations et les rotations de l'espace.

Utiliser leur effet sur l'orientation de l'espace.

Reconnaître l'équation cartésienne d'une droite,

d'un cercle.

Utiliser la représentation polaire d'une courbe plane ; utiliser un grapheur pour obtenir son tracé. Identifier une ellipse à l'aide de sa représentation paramétrique  $x = a \cos(\omega t)$ ,  $y = b \cos(\omega t - \varphi)$  et la tracer dans les cas particuliers  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi/2$  et  $\varphi = \pi$

Citer les expressions du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'une sphère, du volume d'une boule, du volume d'un cylindre.

Énoncer la définition du barycentre.

Utiliser son associativité.

Exploiter les symétries pour prévoir la position du barycentre d'un système homogène.

### Trigonométrie :

Angle orienté, convention d'orientation des angles d'un plan (euclidien). Lecture des lignes trigonométriques dans un triangle rectangle, cas des petits angles.

Fonctions cosinus, sinus et tangente.

Nombres complexes et représentation dans le plan, partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument d'un nombre complexe. Somme et produit de nombres complexes.

Notation complexe, utilisée pour la résolution de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants dont le second membre est une fonction sinusoïdale du temps.

Définir une convention d'orientation des angles d'un plan (euclidien) et lire des angles orientés. Relier l'orientation d'un axe de rotation à l'orientation positive des angles d'un plan perpendiculaire à cet axe.

Utiliser le cercle trigonométrique et l'interprétation géométrique des fonctions cosinus, sinus et tangente comme aide-mémoire : relation  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ; relations entre fonctions trigonométriques et toutes relations du type  $\cos(\pi \pm x)$  et  $\cos(\pi/2 - \pm x)$  parités, périodicité, valeurs des fonctions pour les angles usuels. Citer les formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus ; utiliser un formulaire dans les autres cas.

Calculer et interpréter géométriquement la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument d'un nombre complexe.

### Analyse vectorielle :

Gradient d'un champ scalaire, lien entre le gradient et la différentielle.

On fait le lien entre le gradient et la différentielle. Citer l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles.

Citer l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes ; utiliser un formulaire fourni en coordonnées cylindriques ou sphériques.

Utiliser le fait que le gradient d'une fonction  $f$  est perpendiculaire aux surfaces iso- $f$  et orienté dans le sens des valeurs de  $f$  croissantes.

## 3 Outils numériques pour la physique

*La prise en compte de l'enseignement de l'informatique en sciences physiques est un défi important pour notre système éducatif. L'introduction d'activités numériques dans le programme des classes préparatoires prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation. Elles offrent aux élèves la possibilité d'effectuer une modélisation avancée du monde réel, par exemples par la prise en compte d'effets non linéaires ou le test d'une loi.*

*En sciences physiques, l'utilisation des outils numériques de codage en langage Python est centrée sur la découverte de cet outil de programmation et l'exploitation de fonctions extraites de ses diverses bibliothèques. Python - muni de ses nombreuses bibliothèques - est devenu le langage de référence dans les classes préparatoires scientifiques. Il peut être utilisé comme : simple calculatrice, outil de résolution, visualisation graphique (avec Matplotlib), simulation numérique (NumPy/SciPy), calcul formel (SymPy), réalisation d'interface graphique (TKinter, PyQt...), production de sites, ...*

*Les activités numériques de codage fixées dans ce programme permettent aux élèves de développer des connaissances et des savoir-faire utiles à la physique comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.*

*Le tableau ci-dessous explicite les outils relatifs aux activités numériques ainsi que les savoir-faire exigibles en fin de première année. Il sera complété dans le programme de physique de seconde année.*

Programme	Savoir-faire exigibles
<b>Outils numériques</b>	
Représentation graphique d'un nuage de points.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque matplotlib pour représenter un nuage de points.
Représentation graphique d'une fonction.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque matplotlib pour tracer la courbe représentative d'une fonction.
Courbes planes paramétrées.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque matplotlib pour tracer une courbe plane paramétrée.
<b>Équations algébriques</b>	
Résolution d'une équation algébrique ou d'une équation transcendante : méthode dichotomique.	Déterminer, en s'appuyant sur une représentation graphique, un intervalle adapté à la recherche numérique d'une racine par une méthode dichotomique. Mettre en oeuvre une méthode dichotomique afin de résoudre une équation avec une précision donnée. Utiliser la fonction <code>bisect</code> de la bibliothèque <code>scipy.optimize</code> (sa spécification étant fournie).
<b>Intégration - Dérivation</b>	
Calcul approché d'une intégrale sur un segment par la méthode des rectangles.	Mettre en oeuvre la méthode des rectangles pour calculer une valeur approchée d'une intégrale sur un segment.
Calcul approché du nombre dérivé d'une fonction en un point.	Utiliser un schéma numérique pour déterminer une valeur approchée du nombre dérivé d'une fonction en un point.
<b>Équations différentielles</b>	
Équations différentielles d'ordre 1.	Mettre en oeuvre la méthode d'EULER explicite afin de résoudre une équation différentielle d'ordre 1.
Équations différentielles d'ordre supérieur ou égal à 2.	Transformer une équation différentielle d'ordre $n$ en un système différentiel de $n$ équations d'ordre 1. Utiliser la fonction <code>odeint</code> de la bibliothèque <code>scipy.integrate</code> (sa spécification étant fournie).
<b>Probabilités – statistiques</b>	
Variable aléatoire.	Utiliser les fonctions de base des bibliothèques

Régression linéaire.

random et/ou numpy (leurs spécifications étant fournies) pour réaliser des tirages d'une variable aléatoire.

Utiliser la fonction hist de la bibliothèque matplotlib.pyplot (sa spécification étant fournie) pour représenter les résultats d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire. Déterminer la moyenne et l'écart-type d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire.

Utiliser la fonction polyfit de la bibliothèque numpy (sa spécification étant fournie) pour exploiter des données. Utiliser la fonction random.normal de la bibliothèque numpy (sa spécification étant fournie) pour simuler un processus aléatoire.

---

# REFLECTURE

# Chimie

## 1 Préambule

### 1.1 Objectifs de formation en chimie

La révision du programme de chimie de la classe de 2<sup>ème</sup> année TSI fait suite à celle de la classe de première année. Elle vise à mettre l'accent sur les particularités des méthodes et démarches de cette science, en insistant particulièrement sur les pratiques expérimentales et l'activité de modélisation. Le programme réserve une place importante aux concepts dans une perspective concrète et contextualisée. Le but est de donner aux élèves, futurs ingénieurs, chercheurs ou enseignants, une vision attrayante de la chimie, avec une bonne compréhension des phénomènes étudiés. Ce programme de chimie ambitionne de faire percevoir aux élèves la portée unificatrice et universelle des lois et concepts de la chimie. Il aspire aussi à leur faire sentir les spécificités de la démarche de modélisation visant à établir un lien entre le " monde des faits " et le " monde des modèles ". Cependant, la mise en équation et la résolution mathématique des situations ne doivent pas prendre le dessus sur la compréhension des phénomènes chimiques. Un autre point fort de la chimie, qu'il est bon de souligner, est sa connexion intime avec les autres disciplines scientifiques comme par exemples la physique et la biologie. Il convient que les problématiques abordées, les illustrations et les applications prennent largement appui sur des transformations chimiques rencontrées dans la vie courante, au laboratoire, en milieu industriel ou dans le monde du vivant.

La filière TSI, accueille des élèves issus de l'enseignement technique au lycée qualifiant. Ce sont des élèves habitués au concret et il est toujours plus facile pour eux de partir du particulier vers le général. Cette particularité se reflète dans le contenu du programme de chimie de cette filière et devra se refléter dans son enseignement. D'autre part, ce programme de chimie attache une grande importance à l'instauration d'une continuité suffisante entre le programme de chimie des classes préparatoires et ceux des classes antérieures. Il est bâti de sorte que les connaissances et les savoir-faire des élèves soient compatibles avec la suite de leur formation dans les écoles d'ingénieurs ou le cas échéant dans l'enseignement universitaire. D'ailleurs un soin particulier a été accordé aux passerelles entre le système des classes préparatoires et l'enseignement universitaire.

L'enseignement de la chimie, comme matière à part, permet aux élèves l'acquisition du savoir théorique, du savoir-faire expérimental mettant en jeu les techniques et les outils de modélisation et de simulation de base et la connaissance de certaines applications qui présentent ou illustrent les concepts et les notions fondamentaux de la chimie. L'objectif est d'amener les élèves à acquérir des connaissances de base en chimie et des savoir-faire théoriques et expérimentaux, leur permettant d'accéder à un niveau de base suffisant pour continuer leur formation ultérieure dans les meilleures conditions, et aborder ainsi avec sérénité leurs futures activités scientifiques ou professionnelles. Dans l'immédiat la formation reçue permettra aux élèves d'être mieux armés pour affronter avec confiance les différents concours qui leurs sont destinés.

L'accent sera mis sur la démarche scientifique, fondée sur des savoirs théoriques et des savoir-faire pratiques. L'approche expérimentale est censée développer chez l'élève des qualités inhérentes à toute science expérimentale, comme l'observation, la rigueur, la créativité, l'esprit d'initiative, et le sens critique. Dans ce sens, l'enseignement de la chimie est renforcé par une réhabilitation de la formation expérimentale des élèves à travers les travaux pratiques (TP) et les expériences de cours.

Cette mesure vise à renforcer le côté expérimental chez l'élève et à le familiariser, le plus possible, avec les méthodes et le matériel utilisés en chimie.

L'enseignement de la chimie est enrichi par l'introduction d'activités numériques qui permettront d'aborder de nombreux champs de la discipline. Cette introduction prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation. Dans cet esprit, la prise en compte de capacités de codage en langage Python dans la formation des élèves de 2<sup>ème</sup> année TSI inclue l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques. Elle vise à une meilleure appréhension des principes mis en oeuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée. Elle a aussi pour objectif de mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la chimie. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la chimie comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples. Ces activités offrent aux élèves la possibilité :

- ◆ d'effectuer une modélisation avancée du monde réel, permettant de décrire plus finement le monde réel;
- ◆ de réaliser un programme complet structuré allant de la prise en compte de données expérimentales à la mise en forme des résultats permettant de résoudre un problème scientifique donné;
- ◆ d'étudier l'effet d'une variation des paramètres sur le temps de calcul, sur la précision des résultats, sur la forme des solutions pour des programmes d'ingénierie numérique choisis;
- ◆ d'utiliser les fonctions de l'environnement logiciel pour résoudre un problème scientifique mis en équation lors des enseignements de chimie;
- ◆ d'utiliser les fonctions de l'environnement logiciel pour afficher les résultats sous forme graphique;
- ◆ de tenir compte des aspects pratiques comme l'impact des erreurs d'arrondi sur les résultats, le temps de calcul ou le stockage en mémoire.

Pour certains thèmes, les *activités numériques* à développer sont explicitement signalées en *caractères italiques* dans la colonne des commentaires du tableau des contenus thématiques. Deux *activités numériques* sont associées au thème « *Mesures et incertitudes* ». Elles définissent des savoir-faire numériques exigibles. Une simulation informatique en langage Python est requise. Dans ce cas, le professeur mettra à la disposition de ces élèves, un exemple de programme informatique écrit dans ce langage de programmation familier à l'élève en cours d'informatique. Les outils numériques développés pourront être largement appliqués lors des différentes activités d'enseignement et particulièrement lors des évaluations écrites et orales réalisées en classe.

Avec un code préalablement écrit, le professeur et l'élève pourront mettre en oeuvre les outils numériques :

- ◆ avant une activité pour la préparer : estimer une incertitude, ajuster des valeurs expérimentales, comparer des prévisions théoriques et des observations expérimentales, prolonger informatiquement l'expérience, préparer un exercice, réaliser une illustration (calcul, courbe, animation,...);
- ◆ pendant l'activité : faire un exercice, présenter une illustration...
- ◆ après l'activité : rédiger un compte-rendu.

En plus des activités exigibles, on pourra utiliser l'outil informatique à chaque fois que celui-ci est susceptible d'apporter un gain de temps ou une meilleure illustration des enseignements. C'est ainsi qu'on pourra faire appel, selon les circonstances, à des logiciels de calcul formel et de représentation graphique, ou à des banques de données.

L'esprit de la démarche scientifique adoptée dans l'exécution du programme de chimie, empreinte de rigueur et de sens critique permanent, doit permettre à l'élève, sur toute question du programme :

- ◆ de communiquer l'essentiel des résultats sous forme claire et concise, tant à l'oral qu'à l'écrit ;
- ◆ d'en analyser le caractère de pertinence : modèle utilisé, limites du modèle, influence des paramètres, homogénéité des formules, symétries, interprétation des cas limites, ordres de grandeur et précision ;
- ◆ d'en rechercher l'impact pratique ;
- ◆ de devenir graduellement acteur de sa formation, qu'il comprenne mieux l'impact de la science et que, plus assuré dans ses connaissances, il soit préparé à poursuivre son cursus d'études dans les grandes écoles.

## 1.2 Repères pour l'enseignant

Lors de la mise en application du programme et dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant organise son enseignement en respectant les principes directeurs suivants :

- ◆ privilégier la mise en activité des élèves en évitant tout dogmatisme ;
- ◆ adopter une progressivité dans la difficulté des exercices de travaux dirigés permettant ainsi aux élèves l'assimilation, l'entraînement et l'approfondissement ;
- ◆ permettre et encadrer l'expression par les élèves de leurs conceptions initiales ;
- ◆ valoriser l'approche expérimentale ;
- ◆ contextualiser les apprentissages pour leur donner du sens ;
- ◆ procéder régulièrement à des synthèses pour expliciter et structurer les savoirs et savoir-faire et les appliquer dans des contextes différents ;
- ◆ tisser des liens aussi bien entre les notions du programme qu'avec les autres enseignements, notamment les mathématiques et l'informatique, commun à tous les élèves de la voie TSI ;
- ◆ favoriser l'acquisition d'automatismes et développer l'autonomie et l'initiative des élèves en proposant des temps de travail personnel ou en groupe.

## 2 Communication à l'écrit et à l'oral

La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet à l'élève de développer les savoirs et les savoir-faire d'expression écrite. La qualité de la rédaction et de la présentation, ainsi que la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses élèves, entre les élèves eux-mêmes, doit également contribuer à développer des savoirs et les savoir-faire de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux élèves en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux pratiques ou de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer *la communication à l'écrit et à l'oral*. La communication utilise des moyens diversifiés : les élèves doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

## 3 Évaluation des élèves

L'évaluation des apprentissages en classes préparatoires se définit comme une démarche de collecte d'informations conduisant à un jugement sur la valeur du travail et du résultat d'un élève, par rapport aux objectifs d'une activité d'enseignement, en vue de prendre une décision quant au cheminement ultérieur de l'apprenant. C'est un acte pédagogique ; formatif et sommatif. Elle vise

à mesurer le degré de maîtrise des savoirs et savoir-faire tels que définis par le programme et le niveau d'autonomie et d'initiative des élèves. L'élaboration d'une situation d'évaluation prévoit une progression dans les difficultés suffisamment large pour apprécier les différents niveaux des élèves. L'évaluation doit être établie en relation avec les objectifs de formation et les performances attendues des élèves.

Rappelons que la voie TSI s'adresse aux élèves intéressés par une approche théorique des questions scientifiques. Cette voie est conçue de manière à développer conjointement l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur, sans oublier l'approche des sciences fondamentales basées sur l'expérimentation et la modélisation. Il va de soi que les spécificités de cette voie doivent se retrouver dans le contenu des deux approches, théorique et expérimentale, ainsi que dans l'évaluation et le contrôle des connaissances. Les pratiques d'évaluation doivent respecter l'esprit des objectifs : tester l'aptitude de l'élève moins à résoudre les équations qu'à les poser, puis à analyser les résultats, tant dans leur caractère théorique que pratique.

## 4 Organisation des programmes

Le programme de chimie est organisé en deux parties « *Formation expérimentale* » et « *Contenus thématiques* ».

Dans la première partie, sont décrits l'organisation de la formation expérimentale et les objectifs de cette formation que les élèves doivent développer et acquérir à la fin de l'année scolaire. La mise en oeuvre de la formation expérimentale doit s'appuyer sur des problématiques concrètes et clairement identifiées. Elles doivent être programmées par l'enseignant de façon à assurer un apprentissage progressif de l'ensemble des connaissances et des savoir-faire attendus.

La seconde partie, intitulée " *Contenus thématiques* ", est structurée autour de quatre thèmes. Elle met en valeur les éléments clefs constituant l'ensemble des savoirs et des savoir-faire dont l'assimilation par les élèves est requise. Il est recommandé d'aborder les items de cette partie qui se prêtent à l'exercice, par une approche expérimentale démonstrative ou par une simulation numérique. L'expérience de cours démonstrative menée par l'enseignant pendant le cours éveillerait la curiosité des élèves et susciterait un questionnement actif et collectif, ce qui permettrait de faire évoluer la réflexion théorique et la modélisation. Le choix des thèmes des expériences de cours relève de l'initiative pédagogique et de la responsabilité du professeur.

Pour faciliter la progressivité des acquisitions, pour tenir compte des contraintes liées à la formation expérimentale et afin d'avoir une vision globale à l'échelle nationale, il est impératif de suivre la progression des quatre thèmes de cette partie dans l'ordre suivant :

- I thermodynamique d'un système siège d'une réaction chimique ;**
- II aspects thermodynamiques des réactions d'oxydo-réduction.**

L'ordre d'exposition, dans chaque thème, relève bien sûr de la liberté pédagogique du professeur, cependant, il devra faciliter la progressivité des acquisitions.

Trois annexes sont consacrées :

- au matériel de chimie nécessaire à la mise en oeuvre des programmes ;
- aux outils mathématiques et numériques que les élèves doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de chimie à la fin de l'année de la classe de TSI.

## Formation expérimentale

La chimie, à l'instar de toutes les sciences, est un entrelacement subtil de modèles théoriques et de validations expérimentales. Les travaux dirigés permettent aux élèves de s'entraîner et de mieux s'approprier les concepts et techniques enseignés. Les travaux pratiques leur apportent quant à eux une compréhension plus concrète des phénomènes naturels et technologiques étudiés et développent leurs savoir et savoir-faire expérimentaux. Ils permettent ainsi de tisser un lien étroit entre le réel et sa représentation et constituent pour les élèves un moyen d'appropriation de techniques, de méthodes, mais aussi des notions et des concepts.

D'un autre côté l'activité expérimentale part d'un questionnement inscrit dans un cadre de réflexion théorique et conduit l'élève à analyser la tâche qui lui est demandée, à s'approprier la problématique attachée, à envisager un protocole comportant des expériences, puis à le réaliser. L'élève est alors invité à porter un jugement critique sur la pertinence des résultats obtenus, ce qui permet de conclure quant à la validité des hypothèses formulées. Une séance de travaux pratiques doit comporter non seulement la manipulation proprement dite, mais aussi des temps de réflexion, de construction intellectuelle et d'échanges avec le professeur. C'est pourquoi ce dernier choisit les sujets d'étude plus en raison de leurs qualités formatrices que des phénomènes particuliers qui en constituent le support.

### 1 Objectifs de la formation expérimentale

Le programme de chimie introduit les activités expérimentales avec deux principaux objectifs : un objectif d'éducation scientifique et d'apprentissage des principaux concepts qui permettent de comprendre le monde moderne en tant que citoyen éclairé et un objectif de préparation à l'évaluation des savoir et savoir-faire expérimentaux acquis et par la suite au monde professionnel.

À ce propos, le programme de chimie souligne l'importance :

- ◆ de la pratique expérimentale (travaux pratiques et expériences de cours) comme caractéristique des sciences physiques ;
- ◆ de l'acquisition des connaissances scientifiques et techniques de base (ordres de grandeur, schémas d'explication qualitative, modélisation, information sur le monde technique et les connaissances fondamentales en chimie y comprises les plus récentes) ;
- ◆ de l'entraînement à la manipulation, à l'observation, à la réalisation et à la représentation d'objets et de phénomènes ;
- ◆ de l'entraînement aux modes de raisonnement des sciences physiques, en essayant de présenter aux élèves l'interaction dialectique entre théorie et expériences.

Effectués en binôme ou trinôme, les TP apprennent aux élèves :

- ◆ à se familiariser avec le matériel et à s'adapter à ses contraintes ;
- ◆ à réaliser des mesures et des acquisitions, à les commenter, les interpréter et les confronter à un modèle théorique ;
- ◆ à concevoir progressivement leurs propres protocoles expérimentaux afin de mettre en oeuvre une démarche leur permettant de réaliser les TP ; puis, plus tard, *s'approprier les concepts de la démarche scientifique durables et indispensables* à tous les futurs ingénieurs, chercheurs ou enseignants.

La formation expérimentale des élèves est réalisée à travers deux composantes : les expériences de cours et les travaux pratiques. Ces deux composantes, complémentaires, ne répondent pas tout à fait aux mêmes objectifs :

- ◆ les expériences de cours démonstratives menées par l'enseignant pendant le cours suscitent un questionnement actif et collectif autour d'une expérience bien choisie permettant de faire évoluer la réflexion théorique et la modélisation, d'aboutir à des lois simplificatrices et unificatrices, de dégager des concepts transversaux entre différents domaines de la chimie, de montrer aux élèves que «la théorie et l'expérience sont indissociablement liées» et enfin de mieux se situer par rapport aux objectifs de la leçon. Le choix des thèmes des expériences de cours relève de l'initiative pédagogique et de la responsabilité du professeur ;
- ◆ les travaux pratiques permettent, dans une approche contextualisée, suscitée par une problématique clairement identifiée et, chaque fois que cela est possible, transversale, l'acquisition de savoir et savoir et savoir-faire techniques, de savoir dans le domaine de la mesure et de l'évaluation de sa précision, d'autonomie dans la mise en oeuvre de protocoles simples associés à la mesure des grandeurs physiques ou chimiques les plus souvent mesurées.

Afin d'améliorer la pratique expérimentale et rendre les apprentissages plus efficaces, il convient :

- ◆ de questionner les élèves avant, pendant et après le TP sur ce qu'ils sont en train de faire et surtout sur le pourquoi ;
- ◆ de faire utiliser le matériel sophistiqué (carte d'acquisition, pH-mètre-millivoltmètre, spectrophotomètre à fibre optique ···) de façon consciente. La mesure effectuée avec l'ordinateur, par exemple, ne doit pas se réduire à un presse-bouton. Les enjeux doivent être clairs pour les élèves ;
- ◆ d'être attentif aux exigences des élèves et à l'attendu des différentes évaluations. Ces exigences doivent être motivées et pas seulement être dérivées du fait qu'ils veulent minimiser l'effort à fournir ;
- ◆ de varier le plus possible la typologie des TP. Par exemple, en alternant le fait de faire la théorie avant le TP ou les laisser découvrir la théorie, en alternant entre un texte protocolaire et un bref texte les invitant à développer la mise en oeuvre expérimentale après une recherche documentaire.

Il est important de préciser par écrit, en préambule de l'énoncé de chaque TP, les objectifs et les savoir-faire visés et de ne pas manquer à en évaluer rapidement le degré de réalisation et de maîtrise à la fin de chaque étape ou la fin de la séance.

## 2 Organisation de la formation expérimentale

Cette partie précise les connaissances et les « savoir-faire » associés à la formation expérimentale des élèves et que ces derniers doivent acquérir dans le domaine de la mesure expérimentale et de l'évaluation des incertitudes des mesures. Elle aborde la question de la prévention du risque au laboratoire de physique-chimie. Elle précise aussi la liste des thèmes de travaux pratiques et fixe les objectifs de chaque thème. Elle souligne aussi l'importance de l'évaluation régulière des acquis des élèves inscrits dans le volet de la formation expérimentale.

Une liste de matériel, que les élèves doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice succincte, figure dans l'annexe « 1. Liste de matériel » du présent programme. Son placement en annexe du programme, et non à l'intérieur de la partie dédiée à la formation expérimentale, est délibéré : il exclut l'organisation de séances de travaux pratiques dédiées à un appareil donné et centrées seulement sur l'acquisition des compétences techniques associées.

## 2.1 Mesures et incertitudes

La notion d'incertitude est indispensable dans la démarche expérimentale. En effet, elle est nécessaire pour juger de la qualité d'une mesure ou de sa pertinence. Sans elle on ne peut examiner la compatibilité d'une mesure avec une loi donnée. Ce thème intitulé « Mesures et incertitudes » vise à fournir les outils nécessaires à l'analyse de résultats expérimentaux.

Les élèves doivent avoir conscience de la variabilité des résultats obtenus lors d'un processus de mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type, en connaître les origines et les sources, estimer leur influence sur le résultat final, et comprendre et s'appropriier ainsi les objectifs visés par l'évaluation des incertitudes. Ils détermineront ensuite ce qu'il faudrait faire pour améliorer la précision d'un résultat.

En fin, il est essentiel que les notions sur les mesures et incertitudes diffusent dans chacun des thèmes du programme, théoriques et expérimentaux, tout au long des deux années préparatoires et qu'elles soient régulièrement évaluées.

Le tableau ci-dessous explicite les savoir-faire exigibles sur le thème « mesures et incertitudes ». Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

### Contenu

### Savoir-faire exigibles

Variabilité de la mesure d'une grandeur physique.  
Notion d'incertitude. Incertitude-type.  
Erreur ; composante aléatoire et composante systématique de l'erreur.  
Incertitude-type A. Incertitude-type B. Propagation des incertitudes. Écart normalisé.  
Évaluation d'une incertitude-type.

Incertitude-type composée.  
Incertitude élargie.

Écriture du résultat d'une mesure.  
Chiffres significatifs.  
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.

Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure.  
Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A).  
Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B).  
Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.  
Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient.  
Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée.  
*Activité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.*  
Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.  
Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé.  
Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.

Régression linéaire.

Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle.

Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés.

*Activité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation MONTE-CARLO – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle*

RELLIGCTURIE

## 2.2 Prévention du risque au laboratoire de physique et de chimie

*L'apprentissage et le respect des règles de sécurité dans les laboratoires et les salles de travaux pratiques visent d'une part à réduire les risques liés aux activités expérimentales et d'autre part à sensibiliser les élèves au respect de la législation ainsi qu'à l'impact de leur activité sur l'environnement. L'élève doit adopter une approche méthodique, prudente et soignée et se concentrer sur ce qu'il est en train de faire.*

*La prévention des différents risques repose, d'une part, sur la mise en sécurité des installations électriques, mécaniques, thermodynamiques, ... et des matériels exploités et, d'autre part, sur le respect des règles de sécurité lors de leur utilisation ou lors d'opération sur ou à proximité des différentes installations.*

*Dans le laboratoire de chimie on insistera sur le respect des règles générales de sécurité. Chaque fois qu'un produit chimique est utilisé, son pictogramme est précisé et sa signification est clairement indiquée, ainsi que les phrases **H** (**H** de Hazard/danger) et les phrases **P** (prévention). Les phrases **H** remplacent les anciennes phrases **R** et décrivent les risques d'une substance. Les phrases **P** (prévention) remplacent les anciennes phrases **S** et spécifient les mesures de sécurité qui doivent être suivies lors de la manipulation de ces substances. Des savoirs et des « savoir-faire » sont attachés au thème « Prévention du risque au laboratoire de physique et de chimie ». Ils sont détaillés dans le tableau ci-dessous.*

### Notations et contenu

### Savoir-faire exigibles

## Prévention des risques au laboratoire

Prévention des risques au laboratoire

Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire.

Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.

### Risque chimique

Règles de sécurité au laboratoire. Classes et catégories de danger. Pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques. Mentions de danger (H) et conseils de prudence (P). Fiches de sécurité.

Relever les indications sur le risque associé au prélèvement, au mélange et au stockage des produits chimiques et adopter une attitude responsable lors de leur utilisation.

### Risque électrique

Le risque électrique comprend le risque de contact, direct ou non, avec une pièce nue sous tension, le risque de court-circuit, et le risque d'arc électrique.

Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation d'appareils électriques.

Ses conséquences sont l'électrisation, l'électrocution, l'incendie, l'explosion...

#### Risque optique et électromagnétique

Les rayonnements optiques auxquels peuvent être exposés les élèves sont parfois nocifs pour les yeux et pour la peau. Une démarche de prévention adaptée permet de réduire les risques pour la santé et la sécurité.

Utiliser les sources laser et les diodes électroluminescentes de manière adaptée.

Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation des émetteurs d'ondes hyperfréquences.

#### Risque thermique

L'exposition à une ambiance thermique chaude ou la manipulation de corps chauds ou froids peut être à l'origine de brûlures ou de gelures localisées potentiellement graves.

Adopter une attitude responsable lors de manipulations de corps chauds ou froids.

#### Risque mécanique

Les risques mécaniques englobent la coupure, la lacération ou la piqûre, l'écrasement, le contact avec des machines.

Adopter une attitude responsable lors de manipulations de dispositifs engageant des hautes ou des basses pressions ou lors de la conjonction d'un élément d'un montage et l'énergie d'un mouvement.

#### Risque sonore

Le bruit au travail constitue une nuisance majeure et peut provoquer des surdités mais aussi stress et fatigue qui, à la longue, ont des conséquences sur la santé et la qualité du travail.

Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation des émetteurs d'onde infrasonores, sonores ou ultrasonores.

#### Prévention de l'impact environnemental

Traitement et rejet des espèces chimiques.

Adapter le mode d'élimination d'une espèce chimique ou d'un mélange en fonction des informations recueillies sur la toxicité ou les risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.

### 2.3 Thèmes de travaux pratiques et objectifs

La liste suivante est une proposition non exhaustive de thèmes des TP. Le choix des sujets, des manipulations à réaliser et de la progression des TP (comme celui des expériences de cours) relève de l'initiative pédagogique et de la responsabilité du professeur : les thèmes proposés par le programme sont purement indicatifs, ceux-ci peuvent être remplacés par tout thème à l'initiative du professeur et ne faisant appel qu'aux connaissances du programme de la classe. Cependant, leur contenu doit répondre aux objectifs fixés par le programme. Les connaissances et les savoir-faire expérimentaux développés à travers les objectifs des différents thèmes de travaux pratiques sont exigibles aux épreuves d'évaluation, écrites et expérimentales, en classe et éventuellement aux concours. Ils peuvent faire l'objet de questions aux épreuves écrites et orales. Rappelons qu'à travers les thèmes des travaux pratiques, il faudra procéder à l'évaluation des incertitudes types A et types B, à l'étude de leur propagation à l'aide d'un langage de programmation et à la présentation de la valeur numérique d'un résultat expérimental.

### 3 Solutions aqueuses

**TP1** Tracé et exploitation de courbes de titrage redox; détermination expérimentale de potentiels standard

**TP2** Dosage du diiode par les ions thiosulfate, dosage par excès de la vitamine C . . .

**TP3** Diagramme potentiel-pH du fer

**TP4** Détermination expérimentale d'une constante d'équilibre en solution aqueuse

**TP5** Réalisation d'une pile électrochimique. Protection contre la corrosion.

- ◆ Sélectionner et utiliser le matériel adapté à la précision requise;
- ◆ utiliser les appareils de mesure (balance, pH-mètre, conductimètre, millivoltmètre, spectrophotomètre) en s'aidant d'une notice;
- ◆ étalonner une chaîne de mesure si nécessaire;
- ◆ distinguer les instruments de verrerie In et Ex;
- ◆ préparer une solution de concentration en masse ou en quantité de matière donnée à partir d'un solide, d'un liquide, d'une solution de composition connue avec le matériel approprié;
- ◆ présenter la valeur numérique d'un résultat expérimental; chiffres significatifs, erreurs et incertitudes;
- ◆ mettre en œuvre une réaction d'oxydo-réduction pour réaliser une analyse quantitative en solution aqueuse;
- ◆ mettre en œuvre des réactions d'oxydoréduction en s'appuyant sur l'utilisation de diagrammes potentiel-pH;
- ◆ déterminer une constante thermodynamique d'équilibre;
- ◆ déterminer l'évolution de la valeur d'une constante thermodynamique d'équilibre en fonction de la température;
- ◆ mettre en œuvre de dosages, direct et indirect;
- ◆ réaliser une pile, étudier son fonctionnement et effectuer un bilan de matière;
- ◆ connaître les règles de sécurité au laboratoire et prévenir les risques chimiques, électriques et optiques.

### 4 Thermodynamique chimique

**TP6** Détermination expérimentale d'une enthalpie de réaction

- ◆ Savoir utiliser un calorimètre (mélange, relevé de la température);
- ◆ savoir comment déterminer la valeur en eau d'un calorimètre;
- ◆ mesurer une enthalpie de réaction par calorimétrie;
- ◆ valider expérimentalement une modélisation d'une transformation thermodynamique;
- ◆ analyser qualitativement des expériences de déplacement d'équilibre;
- ◆ réaliser des mesures par régression linéaire.

## 5 Compte-rendu

La séance de travaux pratiques donne lieu à une synthèse écrite comportant, sous forme succincte, l'indication et l'exploitation des résultats. À cet égard on attache de l'importance à leur présentation graphique. L'utilisation d'un ordinateur, soit pour l'acquisition et le traitement de données expérimentales, soit pour comparer les résultats des mesures aux données théoriques, évite des calculs longs et répétitifs et favorise le tracé de courbes. Si les élèves sont appelés à utiliser d'autres appareils, toutes les indications nécessaires doivent leur être fournies.

Il est impératif d'exiger de l'élève la rédaction d'un compte-rendu pendant une séance de travaux pratiques. Cette aptitude constitue un des objectifs de la formation scientifique. Les activités expérimentales sont aussi l'occasion de travailler l'expression orale lors d'un point de situation ou d'une synthèse finale par exemple. Le but est de bien préparer les élèves de CPGE à la présentation des travaux et projets qu'ils auront à conduire et à exposer aux épreuves orales et au cours de leur formation en école d'ingénieur et, plus généralement, dans le cadre de leur métier de chercheur ou d'ingénieur.

L'élève doit rédiger dans son cahier, au fur et à mesure, un compte-rendu :

- ◆ définissant les objectifs du thème de travaux pratiques ;
- ◆ précisant la problématique préalablement définie ;
- ◆ expliquant les choix expérimentaux effectués et les techniques de mesure utilisées ;
- ◆ comprenant les mesures effectuées, et les courbes tracées et visualisées, les photos des écrans d'appareil de mesure ou de visualisation et précisant bien les choix des paramètres de mesure (amplitudes, fréquences, calibres, etc.) ;
- ◆ interprétant les différentes courbes et mesures en relation avec les résultats théoriques fournis.

Si l'intérêt du compte-rendu est évident, en revanche il faut veiller à ce qu'il ne prenne pas une importance considérable, en temps, par rapport au travail expérimental proprement dit.

D'autre part, les différentes activités pratiques doivent être couronnées par l'évaluation hebdomadaire et trimestrielle des savoir et savoir-faire expérimentaux. Lors de cette évaluation, il faudrait bien expliciter les distinctions entre savoirs et savoir-faire, et entre savoir-utiliser et savoir mettre en oeuvre.

## Contenus thématiques

Chaque thème du programme comporte une introduction spécifique indiquant les objectifs de formation et les domaines d'application. Elle est complétée par un tableau en deux colonnes qui identifient, d'une part, les notions et contenus à connaître, et donc exigible, d'autre part, des commentaires ainsi que les activités numériques et expérimentales supports de la formation. Les activités numériques sont identifiées en *caractères italiques*; le langage de programmation conseillé est le *langage* Python. Les thèmes des *activités numériques* sont choisis de manière à représenter la diversité des applications possibles. Le professeur veillera à ce qu'une concertation régulière avec l'enseignant d'informatique soit développée autour de l'exécution de ces activités.

Le programme de chimie a été rédigé et abondamment commenté, avec le souci majeur de faciliter la transition entre l'enseignement secondaire le système des classes préparatoires. Pour atteindre ce but, il a été jugé indispensable :

- ◆ de valoriser l'approche expérimentale des phénomènes pour stimuler chez l'élève une attitude active et créatrice, favorisant l'appropriation des connaissances et le développement d'un certain savoir-faire manuel. Les travaux pratiques (TP) et les expériences de cours sont les temps forts de cette valorisation ;
- ◆ de valoriser l'approche numérique afin de permettre aux élèves de mettre en oeuvre leurs connaissances en informatique dans le cadre de l'étude d'une application en chimie ;
- ◆ de coordonner entre les enseignements de mathématiques, sciences industrielles, informatique, physique et chimie utilisant des outils souvent communs, pour faciliter le travail d'assimilation des élèves. Ceci rejette tout cloisonnement des enseignements scientifiques et suppose au contraire une concertation étroite au sein de l'équipe pédagogique.

Les intitulés de chapitres sont très classiques de façon que les acquis des élèves soient clairement identifiés.

### Table des matières avec horaires indicatifs

<b>Thermodynamique chimique</b>	<b>(14h)</b>	<b>90</b>
Grandeurs de réaction	(6h)	91
Équilibres chimiques en systèmes fermés	(4h)	92
Optimisation d'un procédé chimique	(4h)	93
<b>Thermodynamique redox</b>	<b>(10h)</b>	<b>93</b>
Étude thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction	(4h)	93
Diagrammes potentiel-pH - Phénomène de corrosion humide	(6h)	94

### 1 Thermodynamique des systèmes chimiques

Cette partie est développée en relation avec le programme de thermodynamique physique vu en 1ère année TSI.

Les objectifs généraux de cette partie sont :

- ◆ choisir de manière rigoureuse et décrire le système physico-chimique étudié ;

- ◆ illustrer sur les systèmes engagés dans une transformation chimique la notion de bilan enthalpique pour accéder aux effets thermiques en réacteur isobare ;
- ◆ apprendre à calculer les grandeurs standard de réaction pour une température quelconque ;
- ◆ établir et exploiter le critère d'évolution spontané d'un système engagé dans une transformation physico-chimique ;
- ◆ identifier les paramètres d'influence et leur sens d'évolution pour optimiser une synthèse ou minimiser la formation d'un produit secondaire indésirable ;
- ◆ décrire quantitativement l'évolution d'un système prenant en compte les conditions expérimentales choisies pour réaliser la transformation.

## 1.1 Grandeurs de réaction

*Dans cette partie, l'étude des transferts thermiques, abordée en première année dans le cadre du cours de physique relatif aux transformations physiques du corps pur, est ici généralisée aux transformations physico-chimiques. Pour le calcul des grandeurs standard de réaction, les enthalpies et entropies standard de réaction sont supposées indépendantes de la température.*

*Les notions et contenus sont illustrés à travers des applications liées à la vie quotidienne (contenu calorique des aliments, pouvoirs calorifiques des carburants, etc.), à la recherche (apports des techniques calorimétriques modernes, etc.) ou au domaine industriel.*

Écriture conventionnelle de l'équation bilan d'une réaction chimique.

Les coefficients stoechiométriques sont considérés algébriques.

### Grandeurs de réaction : grandeurs standard de réaction :

État standard et grandeurs molaires standard d'un constituant ;  
Enthalpie standard de changement d'état ;  
États standard de référence d'un élément chimique.

On calcule les grandeurs de réaction à partir des tables de données thermodynamiques.

### Grandeurs standard de formation d'un corps :

- loi de HESS, expression de  $\Delta_r H^\circ$  en fonction des enthalpies standard de formation  $\Delta_f H^\circ$  des constituants à une température donnée ;
- grandeurs standard  $\Delta_r H^\circ$ ,  $\Delta_r S^\circ$  et  $\Delta_r C_p^\circ$  de réaction chimique ;
- signe de  $\Delta_r H^\circ$  : définition d'une réaction endothermique ou exothermique ;
- signe de  $\Delta_r S^\circ$  et production du désordre par la réaction.

Approximation d'ELLINGHAM

Discontinuité de  $\Delta_r H^\circ$ ,  $\Delta_r S^\circ$  et  $\Delta_r C_p^\circ$  lors d'un changement d'état d'un constituant.

Utilisation des tables thermodynamiques pour les calculs des grandeurs de réaction à 298 K.

Modèles de transformation isobare, isotherme ou adiabatique.

Chaleur reçue lors d'une évolution isobare.

Effets thermiques pour une transformation monobare :

- transfert thermique associé à une transformation physico-chimique monobare et monotherme ;

On signale que  $\Delta_r H^\circ$ ,  $\Delta_r S^\circ$  et  $\Delta_r C_p^\circ$  dépendent de la température et on se placera dans toute la suite dans le cadre de l'approximation d'ELLINGHAM.

Les relations de KIRCHHOFF sont hors programme.

Ces modèles de transformations sont simplement cités pour mieux expliciter le lien avec le cours de physique.

Le programme se limite à l'étude des transformations isobares et privilégie l'enthalpie par rapport à l'énergie interne.

On traite sur un exemple une transformation chi-

- variation de température associée à une transformation physico-chimique monobare et adiabatique.

mique supposée monobare et réalisée dans un réacteur adiabatique et on calcule la température maximale théorique (température de flamme). On se place systématiquement dans le cadre de l'approximation d'ELLINGHAM.

## 1.2 Équilibres chimiques en systèmes fermés

Potentiel thermodynamique ; enthalpie libre d'un système.

$G = H - TS$  est définie comme une grandeur énergétique du système.

Expressions différentielles de  $G(T, P, n_i)$ .  
Critère d'évolution d'un système :  $dG_{T,P} \leq 0$ .

On justifie que  $G$  est le potentiel thermodynamique adapté à l'étude des transformations isothermes, isobares et spontanées.

On utilise les paramètres  $(T, P, n_i)$  pour décrire les systèmes où les seuls travaux échangés sont ceux des forces de pression.

On exprime l'entropie créée en fonction de la variation d'enthalpie libre.

Identités thermodynamiques.  
Potentiel chimique  $\mu_i$ .

On distingue les caractères intensif ou extensif des variables utilisées.

On définit le potentiel chimique  $\mu_i$  à l'aide de la fonction enthalpie libre  $G$ .

Enthalpie libre d'un système chimique.  
Expression de  $G$  en fonction des potentiels chimiques des constituants du système.  
Relation de GIBBS-DUHEM.  
Activité.

On adopte pour les potentiels chimiques une expression générale :

$$\mu_i(T, \text{composition}) = \mu_i^\circ(T) + RT \ln(a_i)$$

Expression du potentiel chimique dans chacun des cas :

- gaz parfait pur ou dans un mélange ;
- corps dans un mélange idéal de liquides ;
- corps solide ou liquide non miscible ;
- soluté dans une solution infiniment diluée ;
- solvant.

qui fait référence aux expressions des activités vues en première année. L'établissement de cette expression est hors programme.

Définition du potentiel chimique standard  $\mu_i^\circ$  à une température  $T$ .

Les mélanges non idéaux, les coefficients d'activité, les lois de RAOULT et de HENRY sont hors programme.

Enthalpie de réaction, entropie de réaction, enthalpie libre de réaction et grandeurs standard associées.

Expression de  $\mu_i^\circ$  en fonction de l'enthalpie molaire et de l'entropie molaire standard.

Expression de  $\Delta_r G^\circ(T)$  en fonction des potentiels chimiques standard.

Expression  $\Delta_r G^\circ(T)$  en fonction des enthalpies libres standard de formation  $\Delta_f G^\circ$  des constituants à une température donnée.

Enthalpie libre standard de réaction. Expression de  $\Delta_r G^\circ(T)$  en fonction de  $\Delta_r H^\circ$  et  $\Delta_r S^\circ$ .

Influence de la température sur  $\Delta_r G^\circ(T)$ .

Relation de GIBBS-HELMHOLTZ.

Condition d'équilibre chimique à température  $T$  et

On précise que la constante d'équilibre est une ca-

pression  $P$  fixées.

Constante d'équilibre chimique, loi d'action des masses (relation de GULDERBERG et WAAGE) :

$$K^o(T) = Q_{\text{équi}}(\xi = \xi_{\text{équi}}) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^o}{RT}\right)$$

Relation de VAN'T HOFF.

Composition du système à l'état final : équilibre chimique ou transformation totale.

ractéristique de la réaction qui ne dépend que de la température et de l'écriture conventionnelle de l'équation de la réaction. Elle peut être calculée à partir des données des tables thermodynamiques ou déterminée expérimentalement à partir du quotient de la réaction à l'équilibre chimique et à la température considérée.

Retour sur des exemples d'équilibres en solution aqueuse.

On détermine la composition chimique d'un système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique.

### 1.3 Optimisation d'un procédé chimique

Critère d'évolution et d'équilibre d'une réaction chimique.

Relation entre enthalpie libre de réaction et quotient de réaction.

Expression

$$\Delta_r G = \Delta_r G^o + RT \ln Q$$

Caractérisation de l'état intensif d'un système en équilibre : nombre de degrés de liberté (variance) d'un système à l'équilibre. Facteurs d'équilibre.

Optimisation thermodynamique d'un procédé chimique :

- par modification de la valeur de  $K^o$ . Influence de la température à pression et composition constantes : loi de VAN'T HOFF ;
- par modification de la valeur du quotient de réaction :
- Influence de la pression à température et composition constantes : loi de LECHATLIER ;
- par modification de la valeur du quotient réactionnel, effet de l'ajout d'un constituant.

On exprime  $dG(T, P, \xi)$  à partir de la définition de  $G$  et du second

On signale que le sens d'évolution peut être déduit de la comparaison de  $Q$  et  $K^o(T)$ .

On donne l'allure de la courbe  $G(\xi)$ .

La notion d'affinité chimique est hors programme.

Pour un système en équilibre, le calcul de la variance permet, via l'identification méthodique des variables intensives de description, une caractérisation de l'état intensif de celui-ci par la détermination de son " nombre de degrés de liberté ".

On identifie les paramètres d'influence et leur contrôle pour optimiser une synthèse ou minimiser la formation d'un produit secondaire indésirable.

On souligne la distinction entre déplacement et rupture d'équilibre chimique.

On définit clairement les notions de composés actifs et inactifs (ou inertes). On donne des exemples de l'effet de l'introduction d'un constituant.

On signale que les procédés de synthèse industriels modernes doivent concilier rentabilité et respect de l'environnement.

*activités numériques : tracer, à l'aide d'un langage de programmation, le taux d'avancement à l'équilibre en fonction de la température pour un système siège d'une transformation chimique modélisée par une seule réaction.*

## 2 Aspects thermodynamiques des réactions d'oxydo-réduction

### 2.1 Étude thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction

*Cette partie se fonde sur les acquis de première année relatifs à l'étude des réactions d'oxydo-réduction et des piles, ainsi que sur la partie de thermodynamique chimique de seconde année pour relier les*

*grandeurs thermodynamiques aux potentiels et potentiels standard. On rappelle rapidement les notions de potentiel d'électrode et de réactions aux électrodes étudiées en première année.*

Relation entre enthalpie libre de réaction et potentiels des couples mis en jeu dans une réaction d'oxydo-réduction.	On exploite cette relation, sur un exemple, pour déterminer la valeur du potentiel standard d'un couple rédox à partir de données thermodynamiques.
Relation entre enthalpie libre standard de réaction et potentiels standard des couples impliqués.	
Approche thermodynamique du fonctionnement d'une pile électrochimique.	On établit l'inégalité reliant la variation d'enthalpie libre et le travail électrique. On relie la tension à vide d'une pile électrochimique et l'enthalpie libre de la réaction modélisant son fonctionnement. On décrit et on explique le fonctionnement d'une pile électrochimique à partir de données sur sa constitution et de tables de potentiels standard.
Stockage et conversion d'énergie chimique.	

## 2.2 Diagrammes potentiel-pH - Phénomène de corrosion humide

*Cette partie s'intéresse à la construction, la lecture et l'utilisation des diagrammes potentiel-pH sur l'exemple des diagrammes potentiel-pH de l'eau et du fer. La construction complète de tout autre diagramme potentiel-pH n'est pas un objectif en soi. La confrontation avec la réalité amène à aborder éventuellement des blocages cinétiques en lien avec l'évolution temporelle des systèmes étudiée en première année.*

Principe de construction des diagrammes potentiel-pH.	On se limitera aux espèces suivantes : $\text{Fe}_{(s)}$ , $\text{Fe}^{2+}$ , $\text{Fe}^{3+}$ , $\text{Fe}(\text{OH})_{2(s)}$ , $\text{Fe}(\text{OH})_{3(s)}$ .
Construction des diagrammes potentiel-pH de l'eau et du fer.	La construction complète de tout autre diagramme potentiel-pH ne peut être exigée.
Limite thermodynamique du domaine de stabilité électrochimique de l'eau.	On discute de la stabilité des espèces dans l'eau.
Lecture et utilisation des diagrammes potentiel-pH.	On présente puis on superpose des diagrammes potentiel-pH pour prévoir ou interpréter thermodynamiquement des transformations chimiques.
Prévision des réactions chimiques possibles par superposition de plusieurs diagrammes.	On définit ces notions, à l'aide d'exemples de diagrammes E-pH.
Domaines d'immunité, de passivation et de corrosion d'un métal.	
Corrosion humide, modèle de la micropile.	On signale la corrosion sèche d'un métal par l'oxygène.
Réaction de corrosion : réactions partielles anodique et cathodique.	
Corrosion uniforme en milieu acide, basique ou neutre (aéré ou désaéré).	On interprète qualitativement un phénomène de corrosion uniforme à l'aide de données expérimentales et thermodynamiques.
Corrosion différentielle.	On cite des facteurs aggravants la corrosion. On interprète qualitativement un phénomène de corrosion différentielle faisant intervenir deux métaux.
Protection contre la corrosion : protection par revêtement (rôle d'un film de peinture...), revêtements chimiques (phosphatation, chromatisation, électrozingage...), protections cathodiques et anodiques	

(protection par anode sacrificielle, protection électrochimique par passivation, protection électrochimique par courant imposé).

## ANNEXES

### 1 Liste de matériel

Le standard national du matériel des CPGE donne la liste globale et détaillée du matériel nécessaire à la mise en oeuvre du programme de physique et chimie en ces classes.

Le tableau ci-dessous donne le matériel nécessaire à la mise en oeuvre des programmes et que les élèves doivent savoir utiliser lors d'une évaluation pratique avec l'aide d'une notice simplifiée. Une utilisation de matériel hors de cette liste lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'instructions appropriées et d'une introduction guidée suffisamment détaillée.

#### Matériels

- ◆ verrerie classique de chimie analytique : burettes, pipettes jaugées et graduées, fioles jaugées, erlenmeyers, béchers, etc ;
- ◆ matériel classique du laboratoire de chimie : dispositifs de chauffage ou de refroidissement (bain-marie, bain froid, etc.), dispositifs d'agitation, matériel de filtration sous pression atmosphérique et sous pression réduite ;
- ◆ carte d'acquisition ;
- ◆ spectrophotomètre UV-visible ;
- ◆ pH-mètre et électrodes de mesure ;
- ◆ voltmètre et électrodes de mesure ;
- ◆ conductimètre et cellule de mesure ;
- ◆ thermomètre ;
- ◆ balance de précision.

### 2 Outils mathématiques pour la chimie

*L'utilisation d'outils mathématiques est indispensable en sciences physiques. La capacité à mettre en oeuvre de manière autonome certains de ces outils mathématiques dans le cadre des activités relevant de la physique fait partie des compétences exigibles à la fin de la première année. Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que le niveau de maîtrise attendu en fin de première année. Il est complété dans le programme de seconde année. Cependant les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité sont traitées à l'aide d'outils numériques (calculatrices, logiciels de calcul numérique).*

Programme	Savoir-faire mathématiques exigibles
-----------	--------------------------------------

## Équations algébriques :

Systèmes linéaires de $n$ équations à $p$ inconnues.	Identifier les variables (inconnues) nécessaires à la modélisation du problème sous forme d'un système d'équations linéaires. On donne l'expression formelle des solutions dans le seul cas $n = p = 2$ .
--	---

Équations non linéaires.	Représenter graphiquement une équation de la forme $f(x) = g(x)$ et on interprète graphiquement la ou les solutions.
--------------------------	--

## Équations différentielles linéaires et non linéaires :

Équations différentielles linéaires à coefficients constants. Identifier l'ordre d'une équation différentielle. Forme canonique. Mettre l'équation sous forme canonique. Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants : $y' + ay = f(x)$	Identifier l'ordre d'une équation différentielle. Trouver la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène). Trouver la solution de l'équation complète correspondant à des conditions initiales données. Représenter graphiquement cette solution. Faire le lien entre les conditions initiales et le graphe de la solution correspondante.
--	---

## Fonctions :

Fonctions usuelles ; Dérivée. Dérivée d'une fonction composée. Dérivée temporelle d'une fonction, notation $\frac{dx}{dt}$ ; Primitive et intégrale ; Valeur moyenne ; Représentation graphique d'une fonction.	Exponentielle, logarithme népérien et décimal, cosinus, sinus, tangente, puissance réelle ( $x \rightarrow x^a$ ). Connaître et utiliser les développements limités à l'ordre 1 des fonctions $(1+x)^a$ ; $\ln(1+x)$ et $\exp(x)$ .
---	--

### 3 Outils numériques pour la chimie

*La prise en compte de l'enseignement de l'informatique en sciences physiques est un défi important pour notre système éducatif. L'introduction d'activités numériques dans le programme des classes préparatoires prend en compte l'importance des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation et de la modélisation.*

*En sciences physiques, l'utilisation des outils numériques de codage en langage Python est centrée sur la découverte de cet outil de programmation et l'exploitation de fonctions extraites de ses diverses bibliothèques. Python - muni de ses nombreuses bibliothèques - est devenu le langage de référence dans les classes préparatoires scientifiques. Il peut être utilisé comme : simple calculatrice, outil de résolution, visualisation graphique (avec Matplotlib), simulation numérique (NumPy/SciPy), calcul formel (SymPy), réalisation d'interface graphique (TKinter, PyQt...), production de sites...*

*Les activités numériques de codage fixées dans ce programme permettent aux élèves de développer des connaissances et des savoir-faire utiles à la physique comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.*

*Le tableau ci-dessous explicite les outils relatifs aux activités numériques ainsi que les savoir-faire exigibles en fin de première année. Il sera complété dans le programme de physique de seconde année.*

**Programme**

**Savoir-faire exigibles**

Représentation graphique d'un nuage de points.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque <code>matplotlib</code> pour représenter un nuage de points.
Représentation graphique d'une fonction.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque <code>matplotlib</code> pour tracer la courbe représentative d'une fonction.
Courbes planes paramétrées.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque <code>matplotlib</code> pour tracer une courbe plane paramétrée.

Équations algébriques

Résolution d'une équation algébrique ou d'une équation transcendante : méthode dichotomique.	Déterminer, en s'appuyant sur une représentation graphique, un intervalle adapté à la recherche numérique d'une racine par une méthode dichotomique. Mettre en oeuvre une méthode dichotomique afin de résoudre une équation avec une précision donnée. Utiliser la fonction <code>bisect</code> de la bibliothèque <code>scipy.optimize</code> (sa spécification étant fournie).
--	--

Intégration - Dérivation

Calcul approché d'une intégrale sur un segment par la méthode des rectangles.	Mettre en oeuvre la méthode des rectangles pour calculer une valeur approchée d'une intégrale sur un segment.
Calcul approché du nombre dérivé d'une fonction en un point.	Utiliser un schéma numérique pour déterminer une valeur approchée du nombre dérivé d'une fonction en un point.

Équations différentielles

Équations différentielles d'ordre 1.	Mettre en oeuvre la méthode d'EULER explicite afin de résoudre une équation différentielle d'ordre 1.
Équations différentielles d'ordre supérieur ou égal à 2.	Transformer une équation différentielle d'ordre $n$ en un système différentiel de $n$ équations d'ordre 1. Utiliser la fonction <code>odeint</code> de la bibliothèque <code>scipy.integrate</code> (sa spécification étant fournie).

Probabilités – statistiques

Variable aléatoire.	Utiliser les fonctions de base des bibliothèques <code>random</code> et/ou <code>numpy</code> (leurs spécifications étant fournies) pour réaliser des tirages d'une variable aléatoire. Utiliser la fonction <code>hist</code> de la bibliothèque <code>matplotlib.pyplot</code> (sa spécification étant fournie) pour représenter les résultats d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire. Déterminer la moyenne et l'écart-type d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire.
Régression linéaire.	Utiliser la fonction <code>polyfit</code> de la bibliothèque <code>numpy</code> (sa spécification étant fournie) pour exploiter des données. Utiliser la fonction <code>random.normal</code> de la bibliothèque <code>numpy</code> (sa spécification étant fournie) pour simuler un processus aléatoire.

# REFLECTURE

# Sciences industrielles pour l'ingénieur/Génie Électrique

## 1 Préambule

Les ingénieurs de demain doivent répondre efficacement et de manière innovante aux besoins de progrès et d'amélioration de la qualité de vie des personnes et par ricochet participer dans le développement de la société dans un cadre plus large. Cette réponse se manifeste par leurs implications dans les divers secteurs de l'économie de production et de service. Ils participent aux processus de développement des systèmes à chaque étape de leurs cycle de vie, de la caractérisation du besoin jusqu'au recyclage, en respectant les contraintes écologiques visant un développement durable et en adoptant les règles et concept de l'éco-conception.

Ces nouvelles manières d'aborder les enjeux contemporains de notre société génèrent des problématiques complexes nécessitant la conception de systèmes innovants le plus souvent pluri-technologiques répondant exactement aux besoins des clients. Le développement, la réalisation et la mise en œuvre de ces systèmes nécessitent l'adoption d'une démarche d'analyse qui intègre une multitude de contraintes d'ordre réglementaire, écologique, technologique et économique.

La conciliation de ses contraintes avec les règles du marché en termes de délai et de compétitivité impose l'introduction des concepts de l'ingénierie numérique ainsi que les outils de résolution et de modélisation numérique dans le programme d'enseignement des SII.

## 2 Présentation

### 2.1 Objectifs de la formation

L'enseignement des sciences industrielles pour l'ingénieur (SII) nécessite la mobilisation des compétences scientifiques fondamentales transversales du programme du *Classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE)* ainsi que les outils d'analyse et de résolution numérique qui en découlent pour constituer une panoplie d'outils d'accompagnement de l'apprenant dans la recherche et la conception de solutions industrielles appropriées aux problématiques complexes liées au développement continu du processus industriel. Au terme des deux années de formation, l'appréhension des sciences industrielles vise le développement chez les élèves d'une vision globale de l'approche projet qui nécessite le développement des aptitudes de communiquer, de travailler en équipe, d'auto critique et d'ouverture.

Les compétences acquises doivent constituer une plate-forme solide sur laquelle prendra appui la formation dans les grandes écoles. Dans ces écoles, il sera question d'approfondir les savoirs appréhendés en CPGE, l'introduction et la découverte de nouvelles connaissances et compétences propres aux divers profils de formation au métier d'ingénieur.

Ce programme contribue aussi à l'approche pédagogique par les STEM (*Science, Technology, Engineering and Mathematics*) qui permet de favoriser le décloisonnement entre les disciplines enseignées en CPGE marocaines.

## 2.2 Démarche pédagogique et didactique de l'enseignant

L'approche des enseignements en SII s'organise autour de systèmes pluri-technologiques. Chaque système est défini à partir de besoins fonctionnels et d'exigences, de modèles numériques et d'un système matériel. Un système sera étudié dans sa globalité à partir de ces trois approches imbriquées :

- ◆ la réalité du besoin ou exigences fonctionnelles. Elle se décline dans le cahier des charges défini avec un client ;
- ◆ la réalité virtuelle d'un système. Elle se traduit dans l'élaboration d'un modèle permettant de simuler son comportement afin d'en prévoir et d'en évaluer les performances ;
- ◆ la réalité matérielle d'un système. Les performances du système matériel sont mesurées par expérimentation.

L'illustration de la figure 5.1 montre les trois représentations des systèmes et les écarts constatés entre les performances attendues, simulées et mesurées (Démarche d'ingénieur).

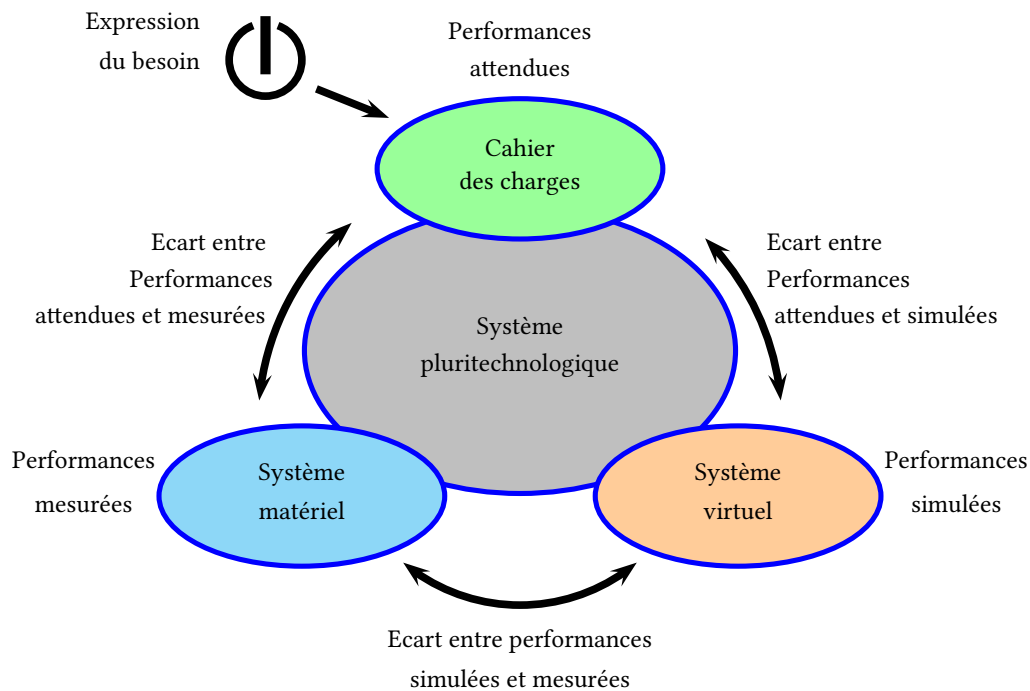


FIGURE 4.1 – Représentations des systèmes et les écarts constatés entre les performances attendues, simulées et mesurées

La démarche pédagogique en sciences industrielles de l'ingénieur vise à :

- ◆ s'approprier les trois réalités du système pluri-technologique (le cahier des charges, le système virtuel et le système matériel) ;
- ◆ comparer les performances issues de ces trois réalités ;
- ◆ optimiser le système virtuel et le système matériel afin de faire converger leurs performances vers celles attendues au cahier des charges.

Les contenus du programme des sciences industrielles de l'ingénieur permettent aux étudiants d'investir complètement la démarche de l'ingénieur en s'intéressant à toutes les représentations des systèmes. Pour cela, les enseignements en SII installent progressivement l'ensemble des connais-

sances et des compétences nécessaires à la maîtrise des différentes représentations d'un même objet ou système, à la comparaison des différentes performances, à l'optimisation des systèmes dans leurs réalités numérique et matérielle, afin de répondre aux attentes du client.

### 2.3 Compétences générales de l'ingénieur développées.

Les compétences développées en sciences industrielles pour l'ingénieur forment un tout cohérent, en relation directe avec la réalité industrielle qui entoure l'élève. Couplées à la démarche de l'ingénieur, elles le sensibilisent aux travaux de recherche, de développement et d'innovation.

Des solutions innovantes sont modélisées de façon numérique. Ces modèles numériques permettent la simulation du comportement des systèmes pluri-technologiques afin d'obtenir des performances simulées. Une démarche expérimentale menée sur des systèmes existants vient enrichir les compétences des étudiants au service de la démarche de l'ingénieur. Elle permet la comparaison des performances simulées et mesurées avec celles attendues au cahier des charges afin d'optimiser tout ou partie du modèle numérique.

Ces compétences sont :

**analyser :** permet des études fonctionnelles, structurelles et comportementales des systèmes conduisant à la compréhension de leur fonctionnement et à une justification de leur architecture. Via les activités expérimentales, elles permettent d'acquérir une culture des solutions industrielles qui facilitent l'appropriation de tout système nouveau. Cette approche permet de fédérer et assimiler les connaissances présentées dans l'ensemble des disciplines scientifiques de classes préparatoires aux grandes écoles ;

**modéliser :** permet d'appréhender le réel et d'en proposer, après la formulation d'hypothèses, une représentation graphique, symbolique ou équationnelle pour comprendre son fonctionnement, sa structure et son comportement. Le modèle retenu permet des simulations afin d'analyser, de vérifier, de prévoir et d'améliorer les performances d'un système ;

**résoudre :** permet de donner la démarche pour atteindre de manière optimale un résultat. La résolution peut être analytique ou numérique. L'outil de simulation numérique permet de prévoir les performances de systèmes complexes en s'affranchissant de la maîtrise d'outils mathématiques spécifiques ;

**expérimenter :** permet d'appréhender le comportement des systèmes, de mesurer, d'évaluer et de modifier les performances. Les activités expérimentales sont au cœur de la formation et s'organisent autour de produits industriels instrumentés ou de systèmes didactisés utilisant des solutions innovantes. Elles permettent de se confronter à la complexité de la réalité industrielle, d'acquérir une culture des solutions technologiques, de formuler des hypothèses pour modéliser le réel, d'en apprécier leurs limites de validité, de développer le sens de l'observation, le goût du concret et la prise d'initiative ;

**concevoir :** permet de modifier l'architecture des systèmes pour satisfaire un cahier des charges. Elle permet également de faire évoluer le comportement des systèmes. Elle développe l'esprit d'initiative et la créativité des élèves.

**communiquer :** permet de décrire, avec les outils de la communication technique et l'expression scientifique et technologique adéquate, le fonctionnement, la structure et le comportement des systèmes ;

**réaliser :** Réaliser tout ou partie d'un prototype.

### 2.4 Activités d'enseignement.

**Cours et TD :** 2 heures hebdomadaires programmées, de préférence, le matin.

**Travaux pratiques :** 1h30 min hebdomadaires par demi-classe découpée en groupes.

**T.I.P.E :** 2 heures hebdomadaires.

**Colles** : 30 min par élève par semaine.

## 2.5 Organisation du programme et volume horaire indicatif

Thème	Contenu	VHI <sup>3</sup>	Trim.
<b>Automatique et modélisation</b>	Performances d'un système asservi	7h	T :1
	Correction d'un système asservi	10,5h	T :1
<b>Chaîne de puissance</b>	Modélisation des composants de puissance	3,5h	T :1
	Modulation alternatif-continu	10,5h	T :1
	Modulation continu-alternatif	10,5h	T :1
	Machine synchrone triphasée	10,5h	T :2
	Machine asynchrone triphasée à cage	10,5h	T :2
<b>Chaîne d'information</b>	Transmission de l'information	10,5h	T :2
	Architecture des réseaux		
<b>Ingénierie numérique et informatique (Annexe 1)</b>			
<b>Les protocoles expérimentaux (Annexe 2)</b>			

## 2.6 Progression

Un découpage trimestriel a été adopté pour développer le contenu du programme des sciences industrielles pour l'ingénieur. Dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant peut traiter le contenu relatif à un trimestre selon ses préférences et ses dispositions pédagogiques. Certaines notions et compétences du programme des sciences industrielles pour l'ingénieur sont en commun avec la physique ou l'informatique.

- ◆ La mention (I) indique que la notion est en commun avec l'informatique. L'enseignant se contentera de proposer à ses élèves des applications spécifiques à la SII (Annexe 1);
- ◆ la mention (P) indique que la notion est en commun avec la physique. L'enseignant doit se concerter avec le professeur de physique pour éviter toute répétition. Les méthodes numériques sont introduites au fur et à mesure, en fonction des besoins de la formation.

## 3 Contenu détaillé du programme

NB : sur la colonne de droite les **commentaires et limitations** sont écrits en *italique*.

### 3.1 Premier trimestre

Connaissances	Savoir-faire : commentaires et limitations
---------------	--

#### Automatique et modélisation

##### Automatique et modélisation

Stabilité : définition, condition de stabilité, position des pôles dans le plan complexe, critère graphique de REVERS, marge de phase et de gain dans le plan de Bode.

Précision : erreur/écart statique et erreur de traî-

**Déterminer** les performances d'un système asservi.

**Donner** des causes à l'erreur statique pas tout à fait nulle constatée dans un asservissement de position.

nage, classe d'une fonction de transfert

- lien entre la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte et l'écart statique ;
  - lien entre la position de l'intégrateur et la sensibilité aux perturbations.
- Rapidité : bande passante et temps de réponse.

### Correction d'un système asservi

Correction des systèmes asservis.

Effets sur les performances.

Régulateurs P, PI et avance de phase.

Discrétisation d'un correcteur. (I)

Modélisation par équations aux différences (équations de récurrence) d'un correcteur numérique.

Caractérisation des signaux à temps discret (échantillonnage et quantification).

Choix des paramètres du solveur (pas de la discrétisation et durée de la simulation). (I)

Influence des paramètres du modèle sur les performances.

Carte de commande.

### Chaîne de puissance

#### Modélisation des composants de puissance

Nature et caractéristiques des grandeurs physiques d'entrée et de sortie : continu ou alternatif, Source de courant ou tension parfaite. (P)

Règles d'association des sources parfaites- transformation de la nature d'une source.

Caractéristiques statiques des interrupteurs.

Bidirectionnalités des interrupteurs.

Association des interrupteurs (cellule élémentaire de commutation).

#### Modulation alternatif-continu

Redresseurs non commandés PD2, P3 et PD3.

*Le critère de ROUTH est hors programme.*

*La mise en évidence des non linéarités est faite lors des activités expérimentales ou au travers de simulations montrant l'intérêt et les conséquences de ce phénomène. (I)*

*L'étude théorique des systèmes non linéaires est hors programme.*

*Seul le diagramme de Bode est au programme.*

**Modifier** la commande pour faire évoluer le comportement du système.

**Utiliser** un correcteur PI pour réaliser un asservissement rapide et précis.

**Mettre** en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

**Mener** une simulation numérique. (I)

**Modéliser** un correcteur numérique.

*La synthèse complète des correcteurs est hors-programme.*

*Pour les correcteurs proportionnel intégral et à avance de phase, la démarche de réglage est fournie.*

*Les limites de modélisation d'un système à temps discret par un modèle à temps continu pourront être mises en évidence par l'augmentation de la période d'échantillonnage. (I)*

*La transformée en  $z$  n'est pas au programme.*

**Choisir** un modulateur en fonction des transferts énergétiques souhaités.

**Déterminer** la structure d'un interrupteur à partir de sa caractéristique statique.

**Choisir** un interrupteur à l'aide d'une notice constructeur.

*La modélisation se limite aux fonctions de modulation continu-continu, continu-alternatif et alternatif-continu non commandée et à leurs associations.*

*Les caractéristiques statiques des interrupteurs sont limitées aux composants à 2 et 3 segments.*

*Les critères de choix se limitent aux grandeurs électriques et aux nombres de segments.*

*La modélisation des pertes dans les interrupteurs n'est pas exigible.*

**Déterminer** les chronogrammes des tensions et des courants.

**Calculer** la valeur moyenne de la tension aux bornes de la charge.

**Calculer** les courants moyens et efficaces.

**Calculer** la puissance transmise ou fournie à la

charge.

**Déterminer** les chronogrammes de la tension redressée et des courants dans les différents éléments. *Dans le cadre d'une démarche pédagogique, les montages PD2 et PD3 sont abordés à partir des montages P2 et P3.*

### Modulation continu-alternatif

Onduleurs de tension autonomes monophasés et triphasés.

**Déterminer** les éléments en conduction.  
**Tracer** les chronogrammes des tensions.  
**Calculer** la valeur efficace de la tension.  
**Effectuer** des calculs et des mesures d'ondulation. *On montre l'intérêt de la commande MLI du point de vue de la qualité de l'énergie. Les développements en série de Fourier seront fournis.*

## 3.2 Deuxième trimestre

### Connaissances

#### Machine synchrone triphasée

- commande scalaire ;
- principe de la commande vectorielle.

#### Machine asynchrone triphasée à cage

Caractéristiques mécaniques actionneur-charge.  
 Point de fonctionnement.  
 Stabilité d'un point de fonctionnement.

### Savoir-faire : commentaires et limitations

**Donner** le schéma équivalent monophasé.  
**Faire** le bilan de puissance (entrée, perte, rendement).  
**Établir** les relations régissant le fonctionnement. *Le modèle statique étudié est le modèle monophasé composé de l'inductance cyclique  $L_s$ , de la résistance statorique  $R_s$ , et de la force contre électromotrice à vide  $E_v$ .*  
*Pour le modèle dynamique :*

- ◆ *on adopte un modèle simplifié dans le plan  $d, q$  ( $L_d = L_q$ );*
- ◆ *donne sans démontrer les résultats des transformations.*

*Il s'agit d'établir que la commande de la MS dans le plan  $(d, q)$  permet d'obtenir le même comportement qu'une MCC.*

**Identifier** le régime de fonctionnement .  
**Donner** les relations mécaniques, électriques et électromécaniques.  
**Établir** le bilan de puissance.  
**Caractériser** le point de fonctionnement en régime permanent de l'association convertisseur électromécanique et charge. *Le modèle étudié est un modèle statique monophasé composé de l'inductance magnétisante  $L$ , de la résistance rotorique ramenée au stator et de l'inductance de fuite rotorique ramenée au stator. Seule la commande scalaire est étudiée (commande en «  $U/f$  » constant).*

*La physique des convertisseurs électromécaniques (machines électriques) n'est pas au programme. (P)*

### 3.3 Chaîne d'information

#### Transmission de l'information

Modes de transmission série ; mise en œuvre d'une transmission série asynchrone.

Topologie, sens de transfert.

**Définir** le principe d'une liaison parallèle

**Interpréter** les niveaux électriques en niveau logiques.

**Indiquer** qu'une liaison parallèle n'est utilisable qu'à faible distance.

**Interpréter** un document technique de connecteur parallèle.

**Définir** le principe d'une liaison série.

**Donner** la signification des termes simplex, half duplex, full duplex.

**Donner** les caractéristiques qui différencient les liaisons synchrones et asynchrones.

**Décrire** la trame de la transmission (Bit de start, bits de données, bit de parité, bits de stop, vitesse en bauds).

**Calculer** le débit maximum en caractères par seconde d'une liaison dont le protocole est donné.

**Interpréter** l'oscillogramme d'un caractère dans un codage sans retour à zéro (NRZ).

**Analyser** les signaux dans les standards de l'industrie (Exemple RS232).

*On n'exige pas l'explication détaillée de la synchronisation dans le cas de liaison asynchrone.*

*On rappelle les niveaux électriques des signaux mais le principe du codage doit être connu.*

#### Architecture des réseaux

Architecture matérielle et fonctionnelle des réseaux : supports de l'information, topologie, sens de transfert.

Caractéristiques d'un canal de transmission.

Multiplexage temporel et fréquentiel.

Notion de protocole : rôle des champs dans une trame.

Architecture protocolaire : organisation en couches fonctionnelles.

Adressage physique et logique d'un constituant.

Paramètres de configuration d'un réseau.

Internet des objets. (I)

**Identifier** dans une trame ou un paquet les différents champs.

**Identifier** dans les champs d'une trame ou d'un paquet l'émetteur de l'information,

**Décoder** une information contenue dans le champ des données afin d'en donner sa valeur dans le système international de mesure,

**Vérifier**, dans le champ de contrôle, si la transmission est exécutée sans erreur.

**Mettre** en œuvre une liaison entre objets communicants. (I)

L'étude des différentes architectures est réalisée uniquement en vue de procéder à une classification en termes de performances.

*On se limite à une approche qualitative des techniques de multiplexage (temporel et fréquentiels); Pour les supports de transmission, on propose : les paires torsadées, les fibres optiques et les liaisons sans fil.*

*On se limite aux protocoles de la couche transport*

(UDP et TCP).

On se limite à la couche application du modèle OSI. L'étude des réseaux de communication est focalisée sur les concepts communs aux protocoles de communication usuels.

## 4 Annexe 1 : compétences en commun avec l'informatique

### Connaissances

### Savoir-faire : commentaires et limitations

#### 4.1 Intelligence artificielle : (I)

Régression et classification, apprentissage supervisé.

Phases d'apprentissage et d'inférence.

Apprentissage supervisé.

Choix des données d'apprentissage.

Choix des paramètres de classification.

Modèle linéaire monovariante,  $k$  plus proches voisins.

Décomposition d'un problème complexe en sous problèmes simples.

Choix des algorithmes d'intelligence artificielle :

- $k$  plus proches voisins ;
- régression linéaire monovariante.

Mise en œuvre des algorithmes ( $k$  plus proches voisins et régression linéaire monovariante).

**Analyser** les principes d'intelligence artificielle.

**Choisir** une démarche de résolution d'un problème d'ingénierie numérique.

**Résoudre** un problème en utilisant une solution d'intelligence artificielle.

*L'utilisation des bibliothèques (Python) pré-implémentées est privilégiée.*

*L'apprentissage non supervisé est introduit en regard de l'apprentissage supervisé mais aucune connaissance spécifique n'est exigible.*

*Les réseaux de neurones sont abordés mais aucune connaissance spécifique n'est exigible.*

**Exemples d'applications :**

- utilisation d'Euler pour discrétiser un correcteur ;
- résolution d'équation non linéaire (seuil, hystérésis ...) pour le cas des SLCI ;
- régression linéaire mono variable : création d'un modèle de comportement «gain pur» à partir de données expérimentales ;
- $k$  plus proches voisins : classification d'images et mise en évidence des erreurs de prédiction.

## 5 Annexe 2 : composantes de la compétence « Expérimenter »

### Connaissances

### Savoir-faire : commentaires et limitations

#### 5.1 Intelligence artificielle : (I)

**Protocoles expérimentaux :**

Environnement du système.

Mise en œuvre d'un système, paramètres de fonctionnement d'un système.

Respect d'un protocole expérimental et des normes de sécurité.

Protection des biens et des personnes.

Règles de raccordement des appareils de mesure et des capteurs.

**Mettre** en œuvre un appareil de mesure adapté à la caractéristique de la grandeur à mesurer. **Identifier** les erreurs de mesure et de méthode. **Choisir** les grandeurs d'entrées à imposer et les grandeurs de sorties à acquérir pour identifier un modèle de comportement sur un système ou sur un constituant du système. **Mettre** en œuvre un système en suivant un protocole dans le respect des règles de sécurité.

Caractéristiques (calibre, position, etc.) et fonctions d'un appareil de mesure.

Incertitudes, résolution, justesse, fidélité, linéarité et sensibilité.

Échantillonnage, repliement de spectre, quantification.

Outils de programmation.

Dispositifs de contrôle.

Scénarios de test.

Normes de sécurité.

**Choisir** la grandeur physique à mesurer ou justifier son choix.

**Proposer** un protocole en fonction de l'objectif visé.

**Configurer et régler** le système en fonction de l'objectif visé.

**Générer** un programme et l'implanter dans le système cible.

**Analyser** les écarts entre les performances d'un prototype et les exigences.

**Rechercher et proposer** des causes aux écarts constatés.

*Dans le choix de l'appareil (y compris RMS ou non), des calibres et des réglages on attend une autonomie importante, éventuellement avec l'utilisation de la notice de l'appareil.*

*Le respect des instructions de sécurité et des normes est une exigence qui s'appuie sur la fourniture des extraits de textes réglementaires.*

*La connaissance des normes de sécurité n'est pas exigible.*

*L'objectif consiste à qualifier et quantifier une performance et/ou renseigner un modèle de comportement.*

*L'incertitude renvoie à la technologie des appareils de mesure et des capteurs. Il n'est pas exigé de longs développements théoriques et calculs associés.*

# REFLECTURE

# Sciences industrielles pour l'ingénieur/Génie Mécanique

## 1 Préambule

Les ingénieurs de demain doivent répondre efficacement et de manière innovante aux besoins de progrès et d'amélioration de la qualité de vie des personnes et par ricochet participer dans le développement de la société dans un cadre plus large. Cette réponse se manifeste par leurs implications dans les divers secteurs de l'économie de production et de service. Ils participent aux processus de développement des systèmes à chaque étape de leurs cycle de vie, de la caractérisation du besoin jusqu'au recyclage, en respectant les contraintes écologiques visant un développement durable et en adoptant les règles et concept de l'éco-conception.

Ces nouvelles manières d'aborder les enjeux contemporains de notre société génèrent des problématiques complexes nécessitant la conception de systèmes innovants le plus souvent pluri-technologiques répondant exactement aux besoins des clients. Le développement, la réalisation et la mise en œuvre de ces systèmes nécessitent l'adoption d'une démarche d'analyse qui intègre une multitude de contraintes d'ordre réglementaire, écologique, technologique et économique.

La conciliation de ses contraintes avec les règles du marché en termes de délai et de compétitivité impose l'introduction des concepts de l'ingénierie numérique ainsi que les outils de résolution et de modélisation numérique dans le programme d'enseignement des SII.

## 2 Présentation

### 2.1 Objectifs de la formation

L'enseignement des sciences industrielles pour l'ingénieur (SII) nécessite la mobilisation des compétences scientifiques fondamentales transversales du programme du CPGE ainsi que les outils d'analyse et de résolution numérique qui en découlent pour constituer une panoplie d'outils d'accompagnement de l'apprenant dans la recherche et la conception de solutions industrielles appropriées aux problématiques complexes liées au développement continu du processus industriel. Au terme des deux années de formation, l'appréhension des sciences industrielles vise le développement chez les élèves d'une vision globale de l'approche projet qui nécessite le développement des aptitudes de communiquer, de travailler en équipe, d'auto critique et d'ouverture.

Les compétences acquises doivent constituer une plate-forme solide sur laquelle prendra appui la formation dans les grandes écoles. Dans ces écoles, il sera question d'approfondir les savoirs appréhendés en CPGE, l'introduction et la découverte de nouvelles connaissances et compétences propres aux divers profils de formation au métier d'ingénieur.

Ce programme contribue aussi à l'approche pédagogique par les STEM (*Science, Technology, Engineering and Mathematics*) qui permet de favoriser le décloisonnement entre les disciplines enseignées en CPGE marocaines.

## 2.2 Démarche pédagogique et didactique de l'enseignant

L'approche des enseignements en SII s'organise autour de systèmes pluri-technologiques. Chaque système est défini à partir de besoins fonctionnels et d'exigences, de modèles numériques et d'un système matériel. Un système sera étudié dans sa globalité à partir de ces trois approches imbriquées :

- ◆ la réalité du besoin ou exigences fonctionnelles. Elle se décline dans le cahier des charges défini avec un client ;
- ◆ la réalité virtuelle d'un système. Elle se traduit dans l'élaboration d'un modèle permettant de simuler son comportement afin d'en prévoir et d'en évaluer les performances ;
- ◆ la réalité matérielle d'un système. Les performances du système matériel sont mesurées par expérimentation.

L'illustration de la figure 5.1 montre les trois représentations des systèmes et les écarts constatés entre les performances attendues, simulées et mesurées (Démarche d'ingénieur).

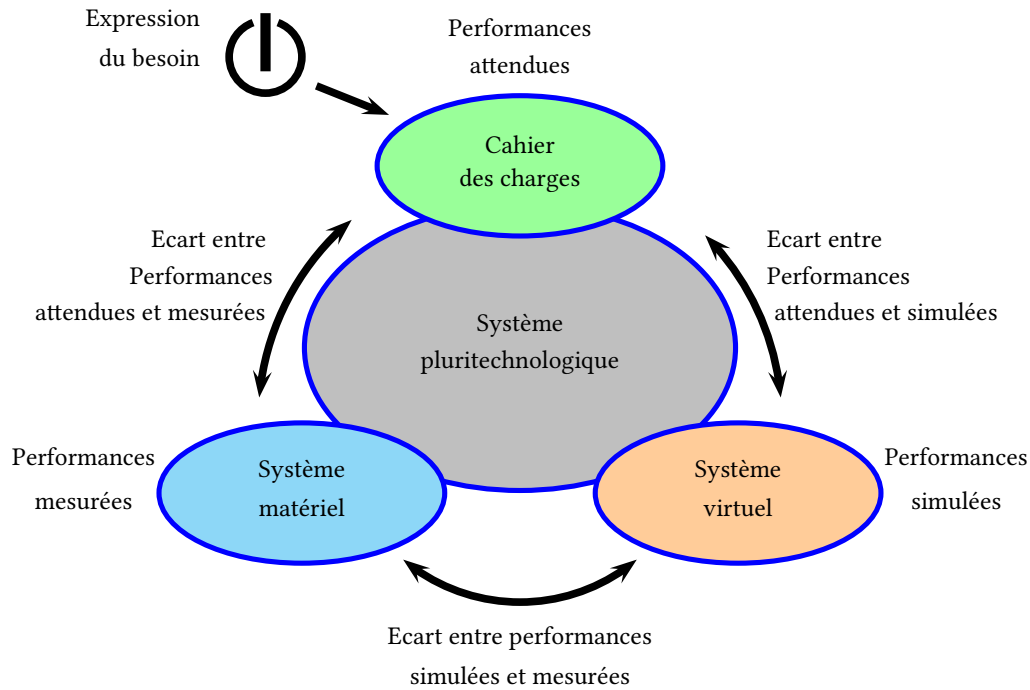


FIGURE 5.1 – Représentations des systèmes et les écarts constatés entre les performances attendues, simulées et mesurées

La démarche pédagogique en sciences industrielles de l'ingénieur vise à :

- ◆ s'approprier les trois réalités du système pluri-technologique (le cahier des charges, le système virtuel et le système matériel) ;
- ◆ comparer les performances issues de ces trois réalités ;
- ◆ optimiser le système virtuel et le système matériel afin de faire converger leurs performances vers celles attendues au cahier des charges.

Les contenus du programme des sciences industrielles de l'ingénieur permettent aux étudiants d'investir complètement la démarche de l'ingénieur en s'intéressant à toutes les représentations des systèmes. Pour cela, les enseignements en SII installent progressivement l'ensemble des connais-

sances et des compétences nécessaires à la maîtrise des différentes représentations d'un même objet ou système, à la comparaison des différentes performances, à l'optimisation des systèmes dans leurs réalités numérique et matérielle, afin de répondre aux attentes du client.

### 2.3 Compétences générales de l'ingénieur développées.

Les compétences développées en sciences industrielles pour l'ingénieur forment un tout cohérent, en relation directe avec la réalité industrielle qui entoure l'élève. Couplées à la démarche de l'ingénieur, elles le sensibilisent aux travaux de recherche, de développement et d'innovation.

Des solutions innovantes sont modélisées de façon numérique. Ces modèles numériques permettent la simulation du comportement des systèmes pluri-technologiques afin d'obtenir des performances simulées. Une démarche expérimentale menée sur des systèmes existants vient enrichir les compétences des étudiants au service de la démarche de l'ingénieur. Elle permet la comparaison des performances simulées et mesurées avec celles attendues au cahier des charges afin d'optimiser tout ou partie du modèle numérique.

Ces compétences sont :

**analyser :** permet des études fonctionnelles, structurelles et comportementales des systèmes conduisant à la compréhension de leur fonctionnement et à une justification de leur architecture. Via les activités expérimentales, elles permettent d'acquérir une culture des solutions industrielles qui facilitent l'appropriation de tout système nouveau. Cette approche permet de fédérer et assimiler les connaissances présentées dans l'ensemble des disciplines scientifiques de classes préparatoires aux grandes écoles ;

**modéliser :** permet d'appréhender le réel et d'en proposer, après la formulation d'hypothèses, une représentation graphique, symbolique ou équationnelle pour comprendre son fonctionnement, sa structure et son comportement. Le modèle retenu permet des simulations afin d'analyser, de vérifier, de prévoir et d'améliorer les performances d'un système ;

**résoudre :** permet de donner la démarche pour atteindre de manière optimale un résultat. La résolution peut être analytique ou numérique. L'outil de simulation numérique permet de prévoir les performances de systèmes complexes en s'affranchissant de la maîtrise d'outils mathématiques spécifiques ;

**expérimenter :** permet d'appréhender le comportement des systèmes, de mesurer, d'évaluer et de modifier les performances. Les activités expérimentales sont au cœur de la formation et s'organisent autour de produits industriels instrumentés ou de systèmes didactisés utilisant des solutions innovantes. Elles permettent de se confronter à la complexité de la réalité industrielle, d'acquérir une culture des solutions technologiques, de formuler des hypothèses pour modéliser le réel, d'en apprécier leurs limites de validité, de développer le sens de l'observation, le goût du concret et la prise d'initiative ;

**concevoir :** permet de modifier l'architecture des systèmes pour satisfaire un cahier des charges. Elle permet également de faire évoluer le comportement des systèmes. Elle développe l'esprit d'initiative et la créativité des élèves ;

**communiquer :** permet de décrire, avec les outils de la communication technique et l'expression scientifique et technologique adéquate, le fonctionnement, la structure et le comportement des systèmes ;

**réaliser :** Réaliser tout ou partie d'un prototype.

### 2.4 Activités d'enseignement.

**Cours et TD :** 2 heures hebdomadaires programmées, de préférence, le matin.

**Travaux pratiques :** 1h30 min hebdomadaires par demi-classe découpée en groupes.

**T.I.P.E :** 2 heures hebdomadaires.

Colles : 30 min par élève par semaine.

## 2.5 Organisation du programme et volume horaire indicatif

Thème	Partie	VHI <sup>3</sup>	Trim.
<b>1 – Comportement des systèmes (Cas des solides indéformables). Dynamique des solides et des systèmes.</b>	Théorèmes généraux de la dynamique Théorème de l'énergie cinétique. Rendement.	38,5h	Trim 1
<b>2 – Comportement des systèmes (Cas des solides déformables). Résistance des matériaux.</b>	Résistance des matériaux.	18h	Trim 2
<b>3 – Adéquation produits-matériaux-procédés.</b>	Choix des matériaux	3,5h	
<b>4 – Représentation des produits. Représentation géométrique du réel.</b>	Cotation G.P.S.	5h	
<b>5 – Ingénierie numérique et informatique</b>	Intelligence artificielle (IA).	5h	

## 2.6 Progression

Un découpage trimestriel a été adopté pour développer le contenu du programme des sciences industrielles pour l'ingénieur. Dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant peut traiter le contenu relatif à un trimestre selon ses préférences et ses dispositions pédagogiques.

Certaines notions et compétences du programme des sciences industrielles pour l'ingénieur sont en commun avec la physique ou l'informatique.

- la mention (I) indique que la notion est en commun avec l'informatique. L'enseignant se contentera de proposer à ses élèves des applications spécifiques à la SII ;
- la mention (P) indique que la notion est en commun avec la physique. L'enseignant doit se concerter en permanence avec le professeur de physique pour éviter toute répétition.

**La collaboration entre les professeurs de GE et GM est impérative pour l'enseignement du thème «Ingénierie numérique et information».**

# Contenu détaillé du programme

## 1 Premier trimestre

### 1.1 Comportement des systèmes (Cas des solides indéformables).

Dynamique des solides et des systèmes :

#### Grandeurs inertielles

- grandeurs inertielles : centre d'inertie, masse, opérateur d'inertie / matrice d'inertie (1) et théorème de Huygens ;
- inertie équivalente et masse équivalentes.

Déterminer les caractéristiques d'un solide (masse, volume, centre d'inertie, matrice d'inertie.)

Ces caractéristiques sont déterminées aussi à l'aide d'un modèleur volumique.

La relation entre la forme de la matrice d'inertie et la géométrie de la pièce est exigible.

Les calculs intégraux des éléments d'inertie (matrice et centre d'inertie) ne donnent pas lieu à évaluation.

Le théorème de Huygens est présenté sous forme vectorielle mais l'utilisation pratique se limite au transport d'un seul moment d'inertie.

#### Grandeurs cinétiques

- grandeurs cinétiques : torseur cinétique, torseur dynamique et énergie cinétique.

La détermination du moment dynamique peut être introduite sur quelques cas simples mais sa maîtrise ne sera ni exigible ni évaluée.

#### Principe Fondamental de la Dynamique

- conditions d'utilisation et application du Principe Fondamental de la Dynamique par rapport à un référentiel galiléen ;
- méthodologie : graphe de structure et d'analyse ;
- isolement, bilan des actions mécaniques extérieures, application du Principe fondamental de la dynamique (PFD) et résolution.

La détermination des actions mécaniques inconnues peut être menée par l'usage d'un outil de simulation numérique.

L'équilibrage dynamique est à traiter comme application du PFD.

Choix des isolements.

Choix des équations pertinentes vis-à-vis de l'objectif.

#### Approche énergétique

- puissances développées par les actions mécaniques extérieures à l'ensemble isolé dans son mouvement par rapport à un référentiel galiléen ;
- puissance des inter-efforts dans un ensemble de solides ;
- utilisation du théorème de l'énergie cinétique galiléenne ;
- notion de pertes de puissance et rendement global en un point de fonctionnement ;
- méthodologie : isolement, bilan des puissances,

Déterminer les actions mécaniques dans le cas où le mouvement est imposé.

Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.

Rappeler la définition d'énergie potentielle de pesanteur et des ressorts.

application du théorème de l'énergie cinétique galiléenne et résolution ;

- rendement en régime permanent.

### Simulation dynamique

Paramétrer un modèle d'étude dynamique dans un logiciel de simulation.

## 2 Deuxième et troisième trimestre

### 2.2 Comportement des systèmes : cas des solides déformables

Résistance des matériaux :

#### Hypothèses de la RDM

Associer un modèle poutre à un solide.

Hypothèses de géométrie.

Fibre neutre et section droite.

Les hypothèses de continuité, d'élasticité, d'homogénéité et d'isotropie des matériaux ainsi que les hypothèses de NAVIER-BERNOULLI et de BARRÉ de SAINT-VENANT tout comme l'hypothèse des petites perturbations (petites déformations et petits déplacements) sont présentées, mais aucune connaissance spécifique n'est exigible.

#### Torseur de cohésion

Déterminer le torseur de cohésion.

#### Sollicitations simples

- sollicitations : traction– compression, torsion, flexion simple et cisaillement ;
- contraintes, déformations ;
- coefficient de sécurité, résistance mécanique ;
- coefficient de concentration des contraintes.

Associer un modèle de contraintes à l'état de sollicitation.

Déterminer la répartition des contraintes dans une section droite. Vérifier la résistance mécanique d'une poutre droite ;

Les méthodes de résolution des problèmes hyperstatiques en résistance des matériaux ne sont pas au programme et les sollicitations ne sont pas combinées.

Déterminer le coefficient de sécurité par rapport aux exigences du cahier des charges fonctionnel.

- proposer une démarche permettant de déterminer les contraintes et/ou les déplacements le long d'une poutre.

Déterminer l'équation de la flèche dans une poutre droite soumise à de la flexion, avec chargements ponctuels ou répartition linéique constante de pression.

L'effet du cisaillement est hors programme.

Tronçons.

Méthode des coupures

#### Simulation dynamique

Paramétrer un modèle dans un logiciel de simulation par éléments finis. (I)

Proposer ou justifier des conditions aux limites dans un logiciel de simulation par éléments finis.

### 2.3 Adéquation produits-matériaux-procédés

- caractéristiques des matériaux dans les domaines de l'électricité, de la thermique, de l'acoustique et de la mécanique. (P)

Identifier les familles des matériaux et analyser le choix des matériaux vis-à-vis des performances attendues.

- matériaux composites. Nano matériaux.
- familles des matériaux.
- analyser un compromis production-procédés-matériaux
- démarche de choix du couple matériaux - procédé (Justifier le choix d'un indicateur de performance.)
- comparer qualitativement les caractéristiques physiques des matériaux. (P).
- justifier le choix d'un matériau et/ou d'un procédé.
- analyser les résultats d'une simulation numérique de procédés. (I)

Les propriétés mécaniques des matériaux sont caractérisées principalement grâce aux essais de traction

Les familles de matériaux retenus sont les métalliques, céramiques, organiques et les composites. Une présentation des propriétés communes à chaque famille est à privilégier.

Choisir un matériau ou une famille de matériau avec des objectifs multicritères.

Choix d'un matériau en fonction du design du produit.

La connaissance des désignations normalisées des matériaux n'est pas au programme.

Propriétés physiques des matériaux.

Classes des matériaux, domaines généraux d'application.

Indices de performance.

Diagrammes d'ASHBY.

Impact environnemental

Caractéristiques des procédés.

Des bases de données et des outils logiciels associés permettent de conduire une analyse qualitative et quantitative sur les procédés et les matériaux en utilisant une démarche d'écoconception.

### Représentation géométrique du réel

Cotation GPS

- tolérances géométriques et dimensionnelles ;
- interprétation des spécifications selon les normes en vigueur. (Cotation GPS).
- structure fonctionnelle d'une machine à mesurer tridimensionnelle (MMT) ;

Interpréter une spécification indiquée sur un dessin de définition.

Les spécifications sont définies par la norme ISO.

Les études de méthode de mesurage seront limitées aux spécifications dimensionnelles, aux spécifications géométriques (planéité, circularité, perpendicularité, coaxialité, localisation, symétrie) avec un système de référence réduit à deux références (primaire et secondaire).

### Intelligence artificielle. (I)

Machine Learning :

- apprentissage supervisé et non supervisé Phases d'apprentissage et d'inférence ;
- régression et classification, modèle linéaire monovarié ou multivarié ;
- réseaux de neurones (couches d'entrée, cachées et de sortie, neurones, biais, poids et fonction d'activation) ;
- décomposition d'un problème complexe en sous problèmes simples ;
- choix des algorithmes (réseaux de neurones, k plus proches voisins et régression linéaire multiple)
- apprentissage supervisé. Choix des données

Analyser les principes d'intelligence artificielle.

Choisir une démarche de résolution d'un problème d'ingénierie numérique en utilisant une solution d'IA. (I).

L'utilisation des bibliothèques (Python) pré-implémentées est privilégiée. (I).

L'apprentissage non supervisé est introduit en regard de l'apprentissage supervisé mais aucune connaissance spécifique n'est exigible.

Les réseaux de neurones sont abordés mais aucune connaissance spécifique n'est exigible. (I).

L'élève doit être capable d'interpréter et vérifier la cohérence des résultats obtenus expérimentalement, analytiquement ou numériquement.

d'apprentissage. Mise en œuvre des algorithmes (réseaux de neurones, k plus proches voisins et régression linéaire multiple). Phases d'apprentissage et d'inférence. Matrice de confusion (tableau de contingence), sensibilité et spécificité d'un test.

Les exemples à traiter sont liés aux systèmes d'ingénierie numérique étudiés en sciences industrielles.

### 3 ANNEXE : composantes des compétences «expérimenter» et «réaliser»

Compétences	Détails et commentaires
<ul style="list-style-type: none"> <li>● prototypage rapide ;</li> <li>● prototype ;</li> <li>● facteurs d'échelle, grandeurs influentes ;</li> <li>● assemblage des constituants ;</li> <li>● méthodes de mesures ;</li> <li>● dispositifs de contrôle. Scénarios de test ;</li> <li>● cycle de vie, stratégies d'écoconception ;</li> <li>● intégrer les contraintes d'écoconception dans les architectures proposées ;</li> <li>● réaliser tout ou partie de la chaîne de puissance ;</li> <li>● analyser les écarts entre les performances d'un prototype et les exigences ;</li> <li>● vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux ;</li> <li>● modifier les paramètres et enrichir le modèle pour minimiser les écarts entre les résultats analytiques et/ou numériques et les résultats expérimentaux.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ réaliser un prototype de tout ou partie d'un système en vue de valider l'architecture fonctionnelle et structurelle ;</li> <li>◆ assembler un ou plusieurs constituants pour permettre de répondre à une fonction technique ;</li> <li>◆ valider les choix des composants vis-à-vis des performances attendues</li> <li>◆ définir les méthodes de mesures ;</li> <li>◆ exploiter et interpréter des résultats de mesure ou de simulation</li> <li>◆ extraire du cahier des charges les grandeurs pertinentes ;</li> <li>◆ exploiter et interpréter les résultats d'un calcul ou d'une simulation (analyse de la modélisation proposée et des résultats obtenus) ;</li> <li>◆ traiter des données de mesures et de simulations et extraire les caractéristiques statistiques ;</li> <li>◆ utiliser des symboles et des unités adéquates</li> <li>◆ vérifier l'homogénéité des résultats ;</li> <li>◆ quantifier des écarts entre des valeurs attendues et des valeurs mesurées ;</li> <li>◆ quantifier des écarts entre des valeurs attendues et des valeurs obtenues par simulation ;</li> <li>◆ quantifier des écarts entre des valeurs mesurées et des valeurs obtenues par simulation ;</li> <li>◆ rechercher et proposer des causes aux écarts constatés ;</li> <li>◆ vérifier la cohérence du modèle choisi avec des résultats d'expérimentation.</li> </ul>

# Informatique

## 1 Préambule

Étant donné que les technologies de l'information et les sciences du numérique évoluent en permanence, le programme d'enseignement d'informatique en deuxième année MP et PSI doit également être constamment adapté pour suivre cette évolution.

En conséquence de cette nécessité, le Ministère de l'Éducation Nationale, du Préscolaire et des Sports, déploie d'importants efforts pour réviser régulièrement les programmes d'informatique dans les classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE) au Maroc. Par conséquent, ce document a été élaboré dans le but de :

- ◆ définir la nature et les caractéristiques de l'informatique en tant que discipline d'enseignement dans les classes préparatoires des grandes écoles (CPGE) ;
- ◆ délimiter le cadre et la vision du programme d'informatique en CPGE ;
- ◆ indiquer les compétences à développer chez les élèves.
- ◆ Fixer les finalités et les objectifs de chaque partie du programme ;
- ◆ établir une approche pédagogique qui servira de guide pour la préparation des activités d'apprentissage en informatique ;
- ◆ présenter le programme ainsi que la progression qui lui est attachée ;
- ◆ conseiller des exercices et des exemples d'applications relatifs aux différents éléments de ce programme.

Le but de ce document est de garantir que l'enseignement de l'informatique dans les classes préparatoires est en adéquation avec les réalités technologiques actuelles afin de préparer les élèves à réussir dans le monde en constante évolution de la technologie de l'information.

## 2 Contexte de la nouvelle réforme de l'informatique en C.P.G.E.

La nouvelle réforme du programme informatique dans les classes préparatoires vise à enrichir le contenu proposé aux élèves afin de leur fournir des outils plus novateurs et actuels qui peuvent leur être utiles dans la suite de leur parcours dans les grandes écoles d'ingénierie, ainsi que dans leur vie professionnelle.

Cette réforme vise également à promouvoir une approche interdisciplinaire, où l'informatique est intégrée à d'autres domaines tels que la physique, les mathématiques et les sciences d'ingénieur afin de permettre aux élèves d'utiliser l'informatique en tant que discipline à part entière ou bien comme un outil pour résoudre des problèmes réels.

Il convient cependant de souligner que cette réforme ne se limite pas simplement à une extension du programme existant ; elle s'inscrit dans une démarche d'amélioration continue, visant à enrichir l'expérience des élèves en introduisant de nouveaux chapitres et en actualisant les contenus existants.

Parmi les nouveautés de cette réforme, l'intégration de la méthode d'interpolation de Lagrange, la théorie des jeux ainsi que les méthodes métaheuristiques représentées par la méthode de recuit simulé. Ces outils vont permettre d'élargir le champ des choix pour les élèves, et leur fournir

une base solide pour résoudre des problèmes en relation avec leur domaine d'études. De plus, ils pourront les utiliser pour rechercher des solutions à certains problèmes de la vie réelle à travers leurs travaux de TIPE.

### 3 Objectifs généraux de la formation

Ce manuel a pour objectif de présenter le contenu de la nouvelle réforme et mettre à jour la liste des objectifs visés tenant en compte les nouvelles parties introduites.

Les objectifs globaux du programme informatique peuvent être énumérés comme suivant :

- ◆ **Utiliser l'informatique pour modéliser et résoudre un problème de la vie réelle** : les élèves doivent être en mesure d'utiliser les différentes techniques et structures de données disponibles pour analyser, modéliser et résoudre efficacement des problèmes concrets. En comprenant les principes sous-jacents des algorithmes et des structures de données, les élèves peuvent choisir les approches les plus adaptées à leurs problèmes spécifiques. Ils doivent également être capables de concevoir des solutions informatiques robustes qui tiennent compte des contraintes de performance, de mémoire et de temps d'exécution.
- ◆ **Structurer une solution informatique** : la structuration d'une solution pour un problème informatique est une étape primordiale pour concevoir des solutions modulaires et faciles à entretenir. En décomposant les problèmes complexes en sous-problèmes plus gérables, les élèves peuvent mieux gérer la complexité et améliorer la lisibilité de leur code. En outre, cette approche favorise la réutilisation du code et facilite la détection et la correction des erreurs. Les élèves sont incités à décomposer leurs solutions en petites fonctions qui seront par la suite regroupées pour fournir la solution globale. Ce processus permet de mieux comprendre et organiser leurs codes, favorisant ainsi leurs maintenances.
- ◆ **Valider une solution** : cela nécessite de justifier que la solution fournit exactement le résultat attendu et que son temps d'exécution est raisonnable. Pour ce faire, l'élève doit développer un esprit critique envers les différents programmes qui lui seront demandés à réaliser. Cet esprit critique est très favorable pour familiariser les élèves à corriger et à améliorer leurs réalisations. En examinant de manière critique leurs propres solutions, les élèves peuvent identifier les erreurs potentielles, les inefficacités et les améliorations possibles. Cela favorise un processus d'apprentissage actif où les élèves acquièrent une compréhension approfondie des algorithmes, des structures de données et des bonnes pratiques de programmation. De plus, cette compétence d'évaluation critique est transférable à d'autres domaines de leur vie professionnelle, où la capacité à évaluer et à améliorer les solutions est essentielle.

### 4 Organisation et recommandations pédagogiques

#### 4.1 Organisation temporelle de la formation

Le programme d'informatique en 2ème année des classes préparatoires vient consolider celui déjà vu en première année. Le programme se porte toujours sur les notions de base de la programmation en utilisant le langage Python. Le contenu de la formation est décomposé en deux périodes.

##### Première période

Pendant la première période, la notion de complexité algorithmique est abordée. Les élèves sont invités à calculer la complexité de leurs programmes, à la fois dans le scénario du pire des cas et dans celui du meilleur des cas, afin d'évaluer leurs programmes et de vérifier leur faisabilité. Comprendre la complexité algorithmique est crucial car elle permet d'estimer les ressources nécessaires à l'exécution d'un algorithme en fonction de la taille de l'entrée, ce qui est essentiel pour évaluer les performances et anticiper les limites de nos programmes.

Le concept de tri est également au programme. Cette notion est déjà introduite en première année, à travers les algorithmes de tri par sélection, par insertion et le tri à bulles. En deuxième année, le cursus approfondit ces connaissances en présentant aux élèves des méthodes de tri plus efficaces, à savoir le tri rapide et le tri par fusion.

Au cours de cette première période, les élèves découvrent la structure de données 'arbre'. Cette structure permet de représenter des données hiérarchiques, facilitant ainsi leur manipulation. Les arbres sont utilisés dans de nombreux domaines, tels que l'informatique, la biologie et la linguistique. En prenant des exemples de ces domaines, cela permet aux élèves de mieux comprendre leur utilité et d'exploiter leur compréhension pour créer et manipuler cette structure pour résoudre certains problèmes en relation avec leur domaine.

La résolution de problèmes liés aux mathématiques demeure un pilier essentiel de la formation en classes préparatoires. Au cours de cette deuxième année, les élèves sont amenés à maîtriser l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre des systèmes d'équations linéaires, calculer des matrices inverses, etc. L'introduction de l'interpolation polynomiale, notamment à travers l'interpolation de Lagrange, constitue une nouveauté dans le programme. Le programme se porte sur la définition du polynôme obtenue par ce type d'interpolation ainsi que l'étude et l'analyse du phénomène de Runge. Ces enseignements visent à développer chez les élèves des compétences clés en algèbre linéaire et en analyse numérique, indispensables pour aborder des problématiques mathématiques avancées et pour explorer des domaines tels que l'optimisation, la modélisation et la simulation dans diverses disciplines scientifiques et techniques.

Le nouveau programme inclut également un nouveau chapitre introduisant les métaheuristiques. Cette technique est fondamentale pour résoudre un large éventail de problèmes d'optimisation rencontrés dans divers domaines, tels que l'ingénierie, les sciences économiques, la logistique, etc. Les élèves apprennent à formuler des problèmes d'optimisation, à concevoir des solutions efficaces et à évaluer les compromis entre différentes approches algorithmiques.

### Deuxième période :

Pendant cette deuxième période, les élèves découvrent une nouvelle structure de données : les graphes. Après avoir exploré la terminologie associée à cette structure, ils s'attaquent à des problèmes classiques qui nécessitent l'utilisation de ces structures. Le problème de recherche du chemin le plus court à origine unique constitue un bon point de départ. L'algorithme de Dijkstra est utilisé pour résoudre ce type de problème.

Pendant cette deuxième période, les élèves sont initiés au domaine de l'intelligence artificielle, et plus précisément au sous-domaine de l'apprentissage automatique (Machine Learning). Ils manipulent l'algorithme d'apprentissage supervisé des K plus proches voisins (KNN) pour réaliser des classifications ou des régressions. De plus, ils découvrent le domaine de l'apprentissage non supervisé à travers l'algorithme des K-moyennes, utilisé pour la segmentation des données. Ces notions visent à initier les élèves au domaine de l'intelligence artificielle et à leur permettre d'acquérir une vision plus claire et technique de ce domaine. Cela doit leur faciliter l'intégration de cet outil pour résoudre des problèmes liés à leurs Travaux d'Initiative Personnelle Encadrée (TIPE) ou à d'autres disciplines.

Dans ce troisième chapitre de la section, les élèves sont initiés à la notion des jeux d'accessibilité à deux joueurs, intégrée dans le cadre du chapitre sur les algorithmes heuristiques. Ils apprennent à utiliser ces algorithmes pour analyser et mettre en œuvre ces jeux.

Également, les élèves explorent le domaine des bases de données pour manipuler l'algèbre relationnelle et le langage SQL (Structured Query Language) afin d'organiser et gérer des données. En combinant la théorie de l'algèbre relationnelle avec la pratique de SQL, les élèves acquièrent les compétences nécessaires pour concevoir, manipuler et interroger des bases de données relationnelles, ce qui est essentiel dans de nombreux domaines de l'informatique et de l'ingénierie.

## 4.2 Recommandations pédagogiques

L'enseignement de l'informatique en deuxième année TSI dans les classes préparatoires aux grandes écoles vise plusieurs objectifs permettant aux élèves d'appliquer les bases de programmation acquises en première année pour résoudre numériquement des problèmes d'ordre scientifiques.

Le programme de l'informatique est organisé en deux périodes de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux périodes d'enseignement doit être respecté, en revanche, au sein de chaque période, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement.

Dans le cadre de ce programme, plusieurs recommandations pédagogiques sont à prendre en compte :

- ◆ **Raisonnement algorithmique privilégié** : il est recommandé de mettre l'accent sur le raisonnement algorithmique beaucoup plus que sur la syntaxe du langage de programmation.
- ◆ **Exemples et exercices multidisciplinaires** : il est recommandé, de donner des exemples et de proposer des exercices inspirés des autres disciplines (mathématiques, physique, chimie et sciences d'ingénieur), concrets et inspirés du monde réel.
- ◆ **Flexibilité dans l'organisation de l'enseignement** : offrir une flexibilité dans l'organisation de l'enseignement, laissant aux professeurs la liberté d'adapter leur approche.
- ◆ **Éviter les développements formels trop théoriques** : les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de la formation de ces classes préparatoires.

# Première période

## 1 La complexité algorithmique

*L'objectif de cette section est d'introduire la notion de complexité algorithmique et d'encourager les élèves à l'utiliser comme une métrique permettant d'évaluer un programme informatique et de confirmer sa faisabilité. Les élèves doivent être capables de calculer la complexité pour un programme itératif ou récursif.*

Introduction à la complexité

Introduire la notion de complexité et expliquez son intérêt. Expliquer la différence entre la complexité temporelle et la complexité en espace.

Énumérer les différents cas d'étude de la complexité (meilleur, moyen, pire). La notion de complexité est abordée en classes prépas uniquement pour les scénarios meilleur et pire des cas.

Compter le nombre d'opérations élémentaires

Calculer le nombre d'opérations élémentaires dans un programme itératif.

Notation asymptotique

Introduire la notation grand O et expliquer son intérêt.

Calculer la complexité pour un programme

Calculer la valeur asymptotique pour un programme itératif.

	Énumérer les ordres asymptotiques classiques Calculer l'ordre asymptotique pour un programme récursif (on peut passer par des approximations pour réduire les calculs)
Calculer la complexité spatiale d'un programme	Se limiter au calcul asymptotique dans le meilleur et le pire des cas

## 2 Algorithmes de tri

*Cette section fait suite à celle étudiée en première année. L'objectif est d'explorer des algorithmes de tri plus efficaces tels que le tri rapide et le tri par fusion. Il est particulièrement intéressant de mettre l'accent sur certaines caractéristiques des algorithmes de tri, telles que la notion de tri en place et de stabilité.*

Tri rapide	Définir le principe de l'algorithme de tri rapide. Implémenter le principe de cet algorithme. Comparer sa complexité avec celles des autres algorithmes. Discuter le choix du pivot.
Tri par fusion	Définir le principe de la méthode tri par fusion. Implémenter le principe de cette méthode. Comparer sa complexité avec celles des autres méthodes.

## 3 Les arbres binaires

*Étant une structure de données très intéressante, les arbres présentent un moyen efficace pour stocker des informations et faciliter leur utilisation. Les élèves sont incités à manipuler cette structure. Ils doivent être en mesure de la définir en utilisant des listes, de la parcourir en largeur et en profondeur, de calculer sa hauteur, etc. Il est également intéressant de manipuler quelques structures d'arbre telles que les arbres binaires de recherche, les tas et autres.*

Terminologie de base : noeud, racine, feuille, noeud interne, degré, ordre, chemin, profondeur, hauteur	Définir les différents composants d'un arbre ainsi que ses caractéristiques. Calculer la hauteur d'un arbre. Calculer la profondeur d'un noeud
Représenter et implémenter la structure arbre binaire	Définir un arbre en utilisant une liste
Parcourir un arbre binaire	Parcourir un arbre en profondeur en utilisant les parcours préfixe, infixé et postfixé. Parcourir également un arbre en largeur
Implémentations et manipulations d'autres variantes	Manipuler et implémenter des structures d'arbres classiques telles que les arbres binaires de recherche et les tas.
Manipuler et implémenter les arbres binaires de recherche	Relation d'insertion dans un arbre binaire de recherche, recherche d'une valeur, hauteur, Insertion, création, etc.
Manipuler et implémenter la structure tas	Créer un tas, Accéder à l'élément minimum (ou maximum), ajouter une valeur, supprimer une valeur, etc.

## 4 Méthode de Gauss

*L'objectif de cette section est de fournir aux élèves une compréhension des systèmes linéaires ( $Ax = B$ ) et des outils nécessaires pour les résoudre numériquement. À la fin de cette section, les élèves devraient être capables de résoudre des systèmes linéaires inversibles en implémentant la méthode d'élimination de Gauss, mais aussi en utilisant le module Numpy.*

Méthode de Gauss : système triangulaire, opérations élémentaires, Principe de l'élimination de Gauss.	S'intéresser au cas particulier des systèmes triangulaires, qu'on va résoudre par remontée ou par descente du système d'équations Introduire les opérations élémentaires à utiliser pour transformer un système linéaire en un autre système linéaire triangulaire équivalent : permutation, dilatation et transvection. Présenter les étapes de l'algorithme d'élimination de Gauss à travers un exemple simple.
Stratégies de choix du pivot	Mettre le point sur les problèmes liés au pivot choisi : erreurs d'arrondis et problème de division sur zéro. Présenter les stratégies de choix de pivot : pivot partiel et total.
Implémentation et applications	Exemples : ■ calcul d'inverse d'une matrice carrée avec l'algorithme de Gauss-Jordan ; ■ calcul de déterminant d'une matrice carrée. etc.
Résolution de systèmes linéaires avec les fonctions de NumPy	Expliquer comment utiliser la fonction solve() du module numpy.linalg pour résoudre des systèmes linéaires.

## 5 Interpolation polynomiale de Lagrange

*L'objectif de cette section est de fournir aux élèves une compréhension de la notion d'interpolation polynomiale à travers la méthode d'interpolation de Lagrange.*

*À la fin de cette section, les élèves devraient être capables d'appliquer, numériquement, l'interpolation de Lagrange pour interpoler une fonction donnée ou bien un nuage de points (des résultats expérimentaux par exemple).*

Introduction à l'interpolation polynomiale	Expliquer l'objectif de l'interpolation et ses cas d'utilisation, ainsi que sa différence avec l'approximation d'une fonction.
Interpolation polynomiale de Lagrange : principe et implémentation.	Présenter le polynôme d'interpolation de Lagrange sur un exemple simple. Visualiser le phénomène de Runge (Effet des bords) lorsque le nombre de points à interpoler est très grand, à travers un exemple.
Interpolation de Lagrange par morceaux de degré inférieur (degré 1 et degré 2)	Subdiviser l'intervalle d'étude en sous intervalles. Utiliser l'interpolation de Lagrange sur chaque sous intervalle (Interpolation par morceaux de degré 1 et de degré 2)

## 6 Meta Heuristique

*L'objectif de cette présentation est d'introduire l'approche métaheuristique dans le contexte de la résolution de problèmes d'optimisation. Les élèves doivent acquérir la compétence nécessaire pour appliquer cette approche à des problèmes relevant du domaine de l'informatique ou d'autres domaines en lien avec leur formation. Il est essentiel de souligner que l'approche métaheuristique ne garantit pas la découverte de la solution optimale, mais elle offre la capacité de trouver une solution approximative.*

Définition et principe

Définir la notion de méta-heuristique et expliquer son principe.

Indiquer que ces méthodes sont employées pour aborder des problématiques variées issues de divers domaines.

Algorithme Recuit simulé

Expliquer son intérêt et son principe.

Implémenter son algorithme.

## Deuxième période

### 1 Introduction à la théorie des graphes

*L'objectif de cette section est de définir la notion de graphes, comme étant des structures de données, ainsi que leurs représentations en Python et leurs manipulations. À la fin de cette section, les élèves doivent être en mesure de concevoir des solutions en utilisant des programmes Python pour résoudre divers problèmes inspirés du monde réel, qui peuvent être représentés par des graphes.*

Vocabulaire des graphes

Présenter les notions suivantes à travers des exemples : graphe orienté/non orienté, sommets et arcs/arêtes, ordre et degré (entrant et sortant), chemin/chaîne et circuit/cycle, connexité dans les graphes non orientés.

Se limiter sur le cas des graphes simples : on n'évoque ni boucles, ni multi-arêtes.

Implémentation et manipulation des graphes

Expliquer comment implémenter des graphes à l'aide de listes d'adjacences (rassemblées dans une liste ou dans un dictionnaire) et à l'aide de matrice d'adjacence.

Donner des exemples pratiques de manipulation des graphes afin de bien maîtriser son implémentation. Par exemple :

- ajout / suppression / test d'existence d'un arc/arête ;
- construction de la liste des voisins d'un sommet à partir de la matrice d'adjacence, etc.

Parcours d'un graphe :

- parcours en largeur et en profondeur ;
- applications.

Souligner les problèmes d'efficacité posés par l'implémentation des files par des listes et l'avantage d'utiliser la fonction `deque()` du module `collections`.

Expliquer et implémenter sur des exemples simples le principe des algorithmes de parcours.

	Utiliser ces algorithmes de parcours pour détecter la présence d'un cycle/circuit dans un graphe, ou bien pour vérifier la connexité d'un graphe non orienté.
Pondération d'un graphe. Étiquettes des arcs ou des arêtes d'un graphe.	Expliquer l'intérêt d'ajout d'étiquettes aux arcs / arêtes d'un graphe à travers des exemples concrets.
Recherche d'un plus court chemin dans un graphe pondéré positivement	Expliquer le principe de l'algorithme de Dijkstra à l'aide d'un exemple de graphe pondéré à poids positifs. Introduire l'algorithme A* comme étant une variante heuristique de Dijkstra.
Applications	Étudier quelques algorithmes classiques sur les graphes, comme : <ul style="list-style-type: none"> <li>■ la coloration des graphes ;</li> <li>■ distances dans un graphe (FLOYD-WARSHALL), etc.</li> </ul>

## 2 Introduction à l'intelligence artificielle

*L'objectif de cette section est d'initier les élèves, d'une manière générale, au domaine de l'intelligence artificielle, et en particulier l'apprentissage automatique qui est utilisé pour résoudre des problèmes de classifications et de segmentations. A la fin de cette section, les élèves doivent être capables de comprendre et de résoudre des problèmes en appliquant des algorithmes de l'intelligence artificielle.*

Introduction à l'intelligence artificielle :	Définir et expliquer son intérêt. Énumérer ses sous-domaines. Donner des exemples de son utilisation dans la vie courante.
Apprentissage supervisé : <ul style="list-style-type: none"> <li>■ problèmes de classification ;</li> <li>■ algorithme KNN ;</li> <li>■ matrice de confusion.</li> </ul>	S'intéresser aux problèmes de classification auxquels on prédit la classe des nouvelles données, en se basant sur un ensemble de données déjà étiquetées avec leurs classes. Présenter l'algorithme des k plus proches voisins (KNN) avec distance euclidienne comme exemple simple d'algorithme de classification, et l'appliquer sur un problème simple. Expliquer comment évaluer la pertinence du choix du paramètre k de l'algorithme KNN à l'aide de la matrice de confusion.
Apprentissage non-supervisé : <ul style="list-style-type: none"> <li>■ problèmes de segmentation ;</li> <li>■ algorithme de k-moyennes.</li> </ul>	S'intéresser aux problèmes de segmentations qui consistent à regrouper un ensemble d'éléments hétérogènes sous forme de sous groupes liés par des caractéristiques communes. Présenter l'algorithme de k-moyennes comme exemple simple d'algorithme de segmentation (clustering). Appliquer cet algorithme sur un exemple simple, et observez sa convergence vers des minimums locaux.
Applications	Appliquer ces algorithmes sur quelques problèmes.

## 3 Introduction à la théorie des jeux

*L'objectif de cette section est de fournir une introduction sur la théorie des jeux, en mettant l'accent sur le lien avec la théorie des graphes, et en se limitant seulement aux jeux d'accessibilité à deux joueurs. À la fin de cette section, les élèves devront avoir une compréhension solide des notions liées à la théorie des jeux d'accessibilité, ainsi que des idées sur les stratégies (algorithmes) utilisées pour les résoudre.*

Jeux d'accessibilité à deux joueurs sur un graphe	Considérer des jeux d'accessibilité à deux joueurs modélisés par des graphes bipartis. Expliquer les notions suivantes à travers un exemple de jeu d'accessibilité simple : état initial, états gagnants, partie du jeu, et graphe biparti du jeu.
Détermination des positions gagnantes par le calcul des attracteurs. Construction de stratégies gagnantes	Déterminer les positions gagnantes de chacun des joueurs en utilisant l'attracteur. Expliquer comment construire les stratégies gagnantes pour chaque joueur (définie sur chaque position gagnante que le joueur contrôle).
Algorithme Minimax avec une heuristique	Introduire l'algorithme min-max comme alternatif dans le cas d'un jeu complexe ou le graphe associé est très gros. Utiliser une heuristique pour privilégier le choix de certaines positions durant le jeu. Appliquer l'algorithme Minimax sur un exemple de jeu simple.

## 4 Les bases de données relationnelles

*Cette partie vise à initier les élèves aux bases de données relationnelles et leur manipulation à l'aide du langage SQL qu'on utilise avec SQLite, un système de gestion de base de données léger.*

*À la fin de cette section, les élèves devront être capables d'exprimer des requêtes SQL permettant d'insérer, mettre à jour et supprimer des données d'une base de données relationnelles, ainsi que d'interroger une base de données pour extraire des informations précises à l'aide de requêtes avancées.*

Vocabulaire des bases de données relationnelles	Présenter les concepts suivants à travers quelques exemples simples : table (relation), attribut (colonne), enregistrement (ligne), domaine et types de données, schéma de tables.
Modèle entités et associations	Expliquer les notions suivantes à travers des exemples simples : entité, association, attributs, identifiant, et cardinalités.
Notion de clé : <ul style="list-style-type: none"> <li>■ clé primaire ;</li> <li>■ clé étrangère.</li> </ul>	Une clé primaire n'est pas forcément associée à une unique colonne même si c'est le cas le plus fréquent. Expliquer le rôle des clés primaires et étrangères pour mettre le lien entre les différentes tables d'une BD relationnelle.
Passage du modèle entité-association au modèle relationnel : transformation des entités et associations en des tables (relations).	Transformer une entité en une relation (table). Séparer une association * - * en deux associations 1 - *. Utiliser les clés primaires et clés étrangères pour traduire les associations 1 - 1 et 1 - *.
Langage SQL et Manipulation des données (insertion, modification et suppression des lignes d'une table).	Introduire le langage SQL et présenter SQLite comme SGBD à utiliser. Présenter la notion de requête SQL et donner la syntaxe des différentes requêtes de manipulation de données : requêtes INSERT INTO, UPDATE et DELETE FROM.
Interrogation d'une base de données relationnelle : requête SELECT (projection) avec simple clause WHERE (sélection).	Expliquer les notions de projection et sélection, en donnant leurs notations en algèbre relationnelle ainsi que les requêtes SELECT équivalentes. Expliquer l'intérêt d'utilisation du mot clé DISTINCT. Utiliser les opérateurs suivants pour exprimer des conditions : =, !=, >, <, >=, <=, AND, OR, NOT, IN,

	LIKE, BETWEEN... AND...
Opérateurs ensemblistes : union, intersection, différence, et produit cartésien.	Donner des exemples de requêtes SQL auxquelles on combine les résultats de plusieurs requêtes avec UNION, INTERSECT ou EXCEPT. Expliquer avec un exemple la notion de produit cartésien, comme étant un outil permettant de combiner les résultats venant de différentes tables.
Jointure interne avec opérateur d'égalité (JOIN... ON... =...).	Introduire la notion de jointure en mentionnant le fait que le résultat d'un produit cartésien peut ne pas avoir de sens. Utiliser les jointures internes pour effectuer des requêtes croisées dans une base de données constituée de plusieurs tables. Consolider les acquis à travers des exemples d'application.
Renommage AS des tables et des colonnes	Expliquer, avec des exemples, l'intérêt du renommage temporairement d'une colonne ou d'une table dans une requête SQL.
Fonctions d'agrégation et groupement des lignes avec la clause GROUP BY.	Appliquer des fonctions d'agrégation sur des groupes de lignes d'une table, qu'on partitionne selon un critère donné portant sur des colonnes (GROUP BY). Mettre en œuvre des agrégats, en utilisant les fonctions MIN, MAX, SUM, AVG et COUNT. Mentionner le fait que les fonctions d'agrégations peuvent s'appliquer sur un seul groupe qui contient toutes les lignes de la table (s'il n'y a pas de GROUP BY).
Filtrage des agrégats avec HAVING	Filtrer des agrégats avec HAVING pour limiter l'affichage sur les groupes qui vérifient une condition donnée. Marquer la différence entre WHERE et HAVING sur des exemples.
Modification d'affichage : tri des résultats et limitation d'affichage	Utiliser le mot-clé ORDER BY pour trier les lignes résultats d'une requête SELECT, par rapport à la valeur d'une ou plusieurs colonnes. Utiliser le mot-clé LIMIT pour limiter le nombre de lignes affichées par une requête SELECT. Utiliser le mot-clé OFFSET pour sauter un certain nombre de lignes.
Requêtes imbriquées : syntaxe et opérateurs de comparaison	Expliquer la syntaxe générale des sous-requêtes dans une clause WHERE, FROM, ou HAVING. Utiliser les opérateurs =, <, >, !=, <=, >=, IN / NOT IN, et EXISTS/NOT EXISTS, pour comparer les résultats de sous-requêtes. Donner quelques exemples de requêtes imbriquées.

# Culture Arabe et Traduction

الثقافة العربية و الترجمة والغرب		
النشاط	نوعها	الحصة
تقديم المادة و المقرر وأساليب الترجمة (30min) Le passeur, Henri Meschonnic	تقديم تعريب	1
لماذا نترجم، أدونيس Les coquelicots de l'Oriental, Brick Ousaid	تعجيم تعريب	2
يختار الأستاذ الموضوع تماشيا مع محاور المقرر.	تعبير كتابي ( المنهجية والموضوع )	3
فرض محروس	فرض	4
Correction du DS : 30 mn avec corrigé distribué aux élèves + L'expérience impériale, Ashis Nandy (45 minutes)	تعريب	5
الثقافة الوطنية، عبد الله العروي (45 دقيقة) Roman maghrébin et culture nationale, Abdelké- bir Khatibi	تعجيم تعريب	6
الغرب وتحديث العالم العربي، محمد بنيس يختار الأستاذ الموضوع تماشيا مع محاور المقرر	تعجيم تعبير كتابي	7
فرض محروس	فرض	8
تصحيح الفرض المحروس	تصحيح	9

# REFLECTURE

# Français

Le programme de la deuxième année des CPGE scientifiques et techniques vise un approfondissement des savoirs et des savoir-faire acquis en première année. Il est constitué de trois composantes complémentaires.

## 1 Littérature et philosophie

Le programme de français-philosophie de la deuxième année des CPGE scientifiques et techniques est articulé autour d'un thème renouvelé chaque année. Par exemple, pour la session 2022, le thème retenu était « l'animal » ; pour 2023, « le monde », pour 2024, « la violence » et pour 2025, le thème est « l'image ».

L'étude du thème de l'année est principalement orientée vers la préparation de l'épreuve de « dissertation de culture générale », proposée dans les concours marocains et étrangers. Cette étude vise à fournir aux élèves les notions, les idées et les exemples nécessaires pour étayer leur réflexion personnelle et développer leur argumentation.

L'exploration méthodique du thème se réalise à travers une progression annuelle élaborée au début de l'année par chaque professeur. Cette progression, cohérente et progressive, est constituée de six séquences au moins, articulées chacune autour d'une problématique dérivée du thème de l'année. Chaque problématique traitée devrait permettre d'explorer un ou plusieurs aspects du thème sur les plans philosophique et littéraire, comme elle peut ouvrir le champ de l'étude vers d'autres domaines de la culture générale : artistique, scientifique, économique, etc.

Le traitement de chaque problématique devrait reposer sur l'analyse comparative de groupements de textes, ou sur l'étude de textes consistants (chapitres par exemples) ou d'une œuvre intégrale. Pour plus de cohérence, le professeur mettra à profit les séances consacrées au résumé et à la synthèse de textes pour proposer des extraits pertinents qui éclairent, approfondissent ou prolongent son étude du thème de l'année.

Le travail sur les textes devrait également donner lieu à des activités visant l'exploitation et l'appropriation des ressources linguistiques offertes par les textes étudiés en vue de développer l'expression écrite et orale des élèves. Ces activités porteront sur l'acquisition du vocabulaire thématique et sur la maîtrise des structures grammaticales et des organisateurs textuels utiles pour la réception et la production de textes argumentatifs

## 2 La méthodologie

C'est la deuxième composante du programme. Elle vise principalement la maîtrise de la méthodologie des exercices proposés aux concours d'entrée aux grandes écoles de commerce au Maroc et à l'étranger.

### 2.1 Le résumé de texte

L'initiation à cet exercice ayant été faite en première année, l'objectif en deuxième année est d'approfondir le savoir-faire déjà acquis à travers le développement des capacités suivantes :

- ♦ analyser des textes argumentatifs de longueur croissante (de 1500 à 4000 mots), et de difficulté progressive (au regard de la complexité du raisonnement et du degré d'abstraction) ;

- ◆ recomposer, en un temps limité, le circuit argumentatif d'un texte relativement long et complexe et reconstituer son plan ;
- ◆ identifier la thèse d'un texte et reconnaître la stratégie argumentative adoptée par l'auteur ;
- ◆ reproduire d'une manière claire, et dans un style personnel, l'essentiel d'un raisonnement abstrait, en respectant la structure, la tonalité et le mode d'énonciation du texte de départ ;
- ◆ respecter l'équilibre d'ensemble des différentes parties qui composent un texte et les étapes du raisonnement qui le sous-tendent ;
- ◆ reformuler d'une manière synthétique un exemple, un récit, une description ou une citation à valeur argumentative ;
- ◆ respecter le nombre de mots prescrit par la consigne ;
- ◆ résumer des textes de longueurs variées (de 1500 à 4000 mots) en un temps limité ;
- ◆ toute autre compétence jugée utile par le professeur.

## 2.2 La dissertation

Lors de la deuxième année, l'élève consolide sa capacité à rédiger une dissertation intégrale de culture générale, selon les normes des différents concours. Pour cela, il devra renforcer les capacités suivantes, déjà acquises en première année :

- ◆ comprendre sans difficulté un sujet de dissertation (en analysant les termes et leurs relations, les présupposés et les limites de ce sujet) ;
- ◆ problématiser un sujet de dissertation et formuler une problématique claire en vue de le traiter ;
- ◆ mobiliser les éléments de culture générale (littérature, philosophie, sciences humaines, arts, etc.) nécessaires pour alimenter son argumentation ;
- ◆ regrouper et hiérarchiser des idées en vue d'élaborer un raisonnement structuré et progressif ;
- ◆ Construire un plan détaillé de la dissertation avec des parties, des sous-parties et des exemples ;
- ◆ argumenter à l'aide de références culturelles étudiées en culture générale ;
- ◆ rédiger, en temps limité, une dissertation intégrale de culture générale ;
- ◆ toute autre compétence jugée utile par le professeur.

## 2.3 La synthèse de textes

Bien que cet exercice ne soit pas très présent dans les concours d'entrée aux écoles d'ingénieurs, le professeur veillera quand-même à le pratiquer avec ses élèves quand il le juge nécessaire. Il est à signaler que cet exercice présente surtout un intérêt pédagogique puisqu'il permet de traiter méthodiquement des groupements de textes sur une thématique donnée en développant les capacités d'analyse et de synthèse.

## 3 La communication orale

Cette composante prépare les élèves à passer les épreuves orales des concours d'entrée aux écoles d'ingénieurs dans les meilleures conditions. Le développement de la communication orale chez les élèves de la deuxième année s'articule autour des capacités suivantes :

- ◆ écouter activement autrui afin de comprendre son message et réagir d'une manière appropriée en liant ses interventions à celles de ses interlocuteurs ;
- ◆ exposer ses idées et ses opinions et argumenter avec conviction sur des sujets complexes en apportant des explications appropriées, des arguments et des commentaires ;

- ◆ développer méthodiquement une argumentation en mettant en évidence les points significatifs et les éléments pertinents ; Développer une argumentation claire, en élargissant et confirmant ses points de vue par des arguments secondaires et des exemples pertinents ;
- ◆ faire un exposé clair en avançant des raisons pour ou contre un point de vue particulier et en présentant les avantages et les inconvénients d'options diverses. Prendre en charge une série de questions, après l'exposé, avec un degré d'aisance et de spontanéité qui ne cause pas de tension à l'auditoire ou à lui/elle-même ;
- ◆ présenter un sujet complexe, bien construit, avec assurance à un auditoire en structurant et adaptant l'exposé avec souplesse, pour répondre aux besoins de cet auditoire. Gérer un questionnement difficile, voire hostile ;
- ◆ soutenir un débat, même sur des sujets abstraits, complexes et non familiers. Argumenter une prise de position de manière convaincante en répondant aux questions et commentaires ainsi qu'aux contre-arguments avec aisance, spontanéité et pertinence.

Comme on peut le constater, les composantes du programme de français-culture générale en classes préparatoires économiques et commerciales présentent une cohérence et une complémentarité. En effet, chaque séquence d'enseignement comporte des activités qui intègrent harmonieusement les objectifs des trois composantes : le développement des compétences méthodologiques s'appuie sur un contenu culturel et mobilise l'aptitude à la communication.

# REFLECTURE

# Anglais

## 1 Introductory Statement

**Introductory Statement** This document serves as a continuation of the first-year general guidelines. Its primary goal is to establish a standardized pedagogical framework aimed at promoting a coherent and unified approach to the teaching of English as a foreign language across Moroccan CPGE (Classes Préparatoires aux Grandes Écoles). The second-year classes teachers are encouraged to implement the teaching guidelines and practices outlined herein, beginning with the 2025-2026 academic year.

Constructive feedback, suggestions, and recommendations regarding any aspect of this document are welcome and should be directed to the National Coordination of English for CPGE or to Inspector/Coordinator of the English department at [noubendouqi@gmail.com](mailto:noubendouqi@gmail.com). All submissions will be reviewed and given appropriate consideration in future updates.

Students pursuing their studies in the second-year preparatory classes- in scientific, technological and management streams- are supposed to have acquired the core thematic, cognitive and linguistic contents and skills as stipulated in the syllabus of the first year. Therefore, teachers are expected to build on those assets and provide their students with the appropriate teaching resources along the second-year prescribed guidelines.

## 2 Goals and aims

Here is a reminder of the goals and aims of teaching English in the CPGE:

- ◆ to enable the learners to enhance their linguistic and communicative competencies in the four areas of the English language system;
- ◆ to promote the learners' awareness of their cultural identity and further their understanding of cross-cultural differences;
- ◆ to develop critical thinking and responsible citizenship in students;
- ◆ to help students analyze different viewpoints in scientific, technological and business texts;
- ◆ to help the learners develop their autonomy and independence and enable them to interact effectively and appropriately with the different environment;
- ◆ to equip learners with basic academic and study skills that enable them to successfully meet the demands of higher education and adapt to the evolving requirements of the job market.

## 3 Specific Performance Objectives - Second Year Level

The following objectives are intended to serve as reference points for teachers as they plan, organize, and implement classroom instruction and learning activities. They reflect the thematic, cognitive, linguistic, and interpersonal goals expected at this advanced stage of preparatory studies:

1. to enhance learners' rhetorical competence in English, with a focus on understanding the structural features of academic discourse and fostering both cross-linguistic and pragmatic awareness through comparative and contextualized practice;

2. to broaden learners' understanding of sustainable and human development, by introducing them to diverse models of effective leadership, governance, and resource management within a globalized context;
3. to consolidate and extend previously acquired linguistic and cultural competencies, ensuring that foundational knowledge is revisited, strengthened, and integrated into new learning contexts;
4. to cultivate a collaborative learning environment, encouraging students to engage in teamwork, cooperative inquiry, and reflective dialogue, while developing critical perspectives on the content and issues discussed;
5. to refine learners' test-taking strategies across the key language skills of reading, writing, and translation, with an emphasis on analytical reasoning and time management;
6. to familiarize students with a variety of academic test formats, enhancing their ability to interpret task instructions accurately and respond effectively under exam conditions.

#### 4 Assessment and Evaluation

Assessment is an integral part of the learning and teaching process. It helps students to understand what they can do with English and what areas of the language they need to improve because of the backwash effect it offers for both students and teachers. "The Race to the Top (RTTT) Assessment" policy adopted in the CPGE has however imposed new roles on both teachers and students in order to maximise learning and at the same time abide by the principles of reliability, validity and fairness. In CPGE, students are tested at regular intervals to gauge their progress towards the set standards bearing in mind the administrative calendar. Throughout the whole year teachers generally administer two types of tests, namely written tests "Devoirs Surveillés" (DS) and oral ones (Colles). (c.f. Term assessment specifications grid), together with a number of quizzes of different types. Students are also assessed by submitting a specific number of "Devoirs Libres" (DL). In the English department, they are referred to as independent work. CPGE students need also to be well-prepared for rigorous national and international examinations to gain admission to prestigious institutions. This preparation requires the coverage of all the course components, be they thematic, cognitive or linguistic.

At the cognitive level, students need to develop effective study skills, time management strategies, and test-taking techniques. Regular practice through mock exams and standardized test preparation materials can help students become familiar with the exam format and help them reduce anxiety. Additionally, understanding the specific requirements and expectations of each examination, whether it is the TOEIC, SAT, TOEFL, or other entrance exams, allows students to tailor their study plans accordingly. Comprehensive preparation therefore ensures that students not only meet but exceed the academic standards required by top-tier institutions. This strategic approach to exam readiness enhances their chances of securing admission and scholarships to renowned universities in Morocco and abroad.

#### 5 Thematic contents – SECOND YEAR

*The main theme and the selected sub-themes for the 2025-2026 academic years are scheduled as follows:*

Main theme	The business environment in a Digitized world	Knowledge management & Social entrepreneurship
Subthemes	Digitization & Jobs of the future	Knowledge management & Social entrepreneurship

		Social entrepreneurship & technology in the digital economy
Theme-related expected learning outcome	<p>Students are sensitized to the digitalization process around the globe.</p> <p>Students demonstrate sensitivity towards the impact of the internet on future jobs.</p>	<p>Generating wealth depends on true involvement in local &amp; international trade and an understanding of finance issues in a digitized world</p> <p>To create wealth in a dynamic society requires coping with technological progress in local and global environments.</p>
Statement of Inquiry	<p>A mindset of an IT literate promotes a healthy integration in global business environments.</p> <p>Abundant job opportunities around the globe nowadays is a result of strong economies, skilled people with creative ideas, and appropriate professional environments.</p>	<p>Creating wealth &amp; prosperity is a result of awareness of finance issues around the globe</p> <p>A recognition of the intersections between culture, communication, technology &amp; business are key to successful social entrepreneurship.</p>
Suggested Topics.	<p>Smart cities &amp; technological development.</p> <p>The new industrial revolution &amp; the Internet of Things.</p> <p>Future Jobs in the digital world.</p>	<p>International Trade and cashless societies.</p> <p>Local businesses and Start-ups.</p> <p>Data Management Vs knowledge management.</p> <p>Social &amp; emotional intelligence.</p>

Revisiting/Recycling main themes & skills for the standardized tests & preparation for the national & International tests. % . This justifies the grade the student gets in term 6.

### 5.1 Independent Project

The project to be conducted by students individually under one of the main themes:

- going digital in a multilateral world: digital mind, digital life and digital business;
- s recognition of the intersections between culture, communication, technology & business are key to successful social entrepreneurship.

#### The business environment in a Digitized world      Knowledge management entrepreneurship & Social

Progress & development

- ▶ Culture & identity;
- ▶ Human values and Global citizenship;
- ▶ Communication & cooperation;
- ▶ Art and technology.

## 6 Cognitive contents and skills SECOND YEAR

As part of our commitment to building lifelong learners and independent thinkers, this year's focus for second-year students includes a structured development of essential cognitive skills and strategies as a further development of the first year's program. These contents aim to foster students' ability to research effectively, prepare for and approach assessments with confidence, and engage in thoughtful, critical thinking across disciplines.

This program is designed to support students in becoming more autonomous, reflective, and strategic in their learning and teachers in integrating cognitive skill-building into their classroom instruction in meaningful and transferable ways.

The modules are grouped into three main categories:

- **Study Skills & Research:** developing techniques to search for information online, assess source credibility, and carry out structured research tasks.
- **Reviewing & Test-Taking:** building practical strategies to prepare for different types of tests, read assessment tasks critically, and take purposeful notes.
- **Critical Thinking:** encouraging students to explore different perspectives, question assumptions, analyze reasoning, and develop informed opinions.

Together, these sets of skills provide a strong foundation for academic success and are aligned with 21st-century learning expectations. We invite both students and teachers to approach these contents not just as tasks to complete, but as tools for thinking, questioning, and growing.

## 7 Linguistic skills\_ SECOND YEAR

As part of the CPGE requirements, and in order to help the candidates be better prepared for the academic and professional requirements, the Second Year Linguistic Skills program is designed to equip students in the Classes Préparatoires aux Grandes Écoles (CPGE) with the advanced tools they need to succeed in both competitive exams and higher education contexts, where analytical communication and language precision are critical.

Second year's program emphasizes a comprehensive, skills-based approach to English language learning, focusing on critical reading, visual and auditory comprehension, oral communication, and writing. It goes beyond basic fluency to develop meta-linguistic awareness and strategic competence in both academic and real-world scenarios.

Specifically, the linguistic contents and skills should enable students to:

- analyze texts with depth and accuracy;
- listen actively and interpret complex visual and auditory messages;
- speak clearly, fluently, and persuasively in academic or professional settings;
- write effectively, using logical structure, argumentation, and coherence.

The skills outlined are not isolated competencies, but interconnected dimensions of language mastery that enhance critical thinking, argument construction, and cross-cultural communication. Whether preparing for oral examinations, written tasks, or academic debates, students are encouraged to engage with language as a tool for inquiry, analysis, and expression.

Teachers are invited to guide learners not just toward performance, but toward language empowerment, where students develop ownership of their expression and voice in English. Language is therefore viewed not only as a subject to study, but as a means to think, reason, and connect. Please find below a more detailed organisation of these contents and skills.

## 7.1 Critical Reading Subskills

To meet the demanding cognitive and linguistic expectations of national and international examinations, second-year CPGE students are required to cultivate advanced language skills across multiple domains. The following subskills are designed not only to enhance learners' comprehension and analytical abilities but also to equip them with practical strategies for tackling complex tasks in academic and assessment contexts.

### Idea Analysis:

- ◆ Comparing and contrasting text information;
- ◆ recognize logical fallacies;
- ◆ identify the writer's attitude or bias; identify the mood or the tone of the writer.

### Critique Content and Textual Elements

- ◆ Understand the macrostructure of texts and quickly extract relevant information;
- ◆ analyze texts to recognize explain text organizational pattern (classifying, cause and effect, sequencing, describing, etc.);
- ◆ recognize cohesive patterns;
- ◆ transcode information into tabular form (tables, graphs, diagrams, etc.);
- ◆ describe, interpret or represent information in a different way (e.g. Use graphs / diagrams or infer cause and consequence, etc.);
- ◆ paraphrase Ideas and Sentences.

### Displaying Comprehension: evaluate Content and Textual Elements

- ◆ Summarize oral or written texts;
- ◆ evaluate, assess, make judgments and justify standpoints;
- ◆ synthesize, create new ideas, predict and draw conclusions.

## 7.2 Listening/Visual interpretation subskills

- ◆ Construct meaning from main ideas and supporting details, and draw conclusions from visual texts presented with spoken and/or written text;
- ◆ listen effectively & comprehend a lecture, an interview, a filmstrip, etc;
- ◆ interpret specific information, ideas, opinions and attitudes, presented in visual texts with spoken and/or written texts.

## 7.3 Speaking Subskills

- ◆ Speak appropriately and effectively and exchange opinions or express feelings;
- ◆ use transitions to establish connectedness, signal movement from one idea to another, and to clarify relationships among ideas;
- ◆ respond fluently and accurately to oral or written. messages.

## 7.4 Writing

- ◆ Summarize a paragraph, a short text or a longer passage;
- ◆ make a clear argument; Avoid repetition and narrative;
- ◆ subdivide long sections;

- ◆ Provide evidence for claims; Provides rationale for paper;
- ◆ use the stages of writing, namely prewriting, drafting/composing, revising and editing avoids lengthy sentences; (Paragraph and essay).

## 8 Translation

Teaching translation hopes to support student mastery of the lexical repertoire of both English and French; their knowledge of the syntactic systems of both languages, cultural and sensitivity when using French or English at the discourse level. It also hopes to promote fidelity and fluency in using both languages.

As for the translation goals, the course hopes to help the students improve their analytical skills, focus on accuracy and style, improve vocabulary and grammar. The following table summarizes the expected learning outcome and the target translation strategies.

Targeted skill	Expected learning outcome	Target translation strategies
Understand context.	Analyze whether the text is technical, cultural, or literary before choosing a technique.	<ul style="list-style-type: none"> <li>● literal translation &amp; calque introduce basic linguistic patterns;</li> <li>● modulation and equivalence address cultural and emotional subtleties.</li> </ul>
Balance fidelity and fluency.	Prioritize preserving the meaning and naturalness of the text over rigid adherence to the original words or structure.	Borrowing and equivalence, maintain authenticity while, ensuring readability.
Be aware of false friends.	Some borrowed or calqued words can lead to mistranslation due to differences in meaning (e.g., <i>actuellement</i> in French means "currently," not "actually").	Borrowing and literal translation highlight potential pitfalls, fostering critical thinking.
Cultural sensitivity.	Be mindful of cultural nuances that may influence the choice of technique.	Modulation, equivalence, and reduction emphasize adapting meaning to the audience.
Experiment & revise.	Translators often draft using one technique, then revise to ensure clarity and appropriateness in the target language.	Transposition and reduction encourage trying new approaches and refining through feedback.

## 9 Table of Specification for CNC and CNAEM

The Hierarchy of Cognitive Skills: from Knowledge Recall to Creative Synthesis.

### 9.1 The Hierarchy of Cognitive Skills: from Knowledge Recall to Creative Synthesis

Cognitive Level	Cognitive skills governing the cognitive level
(20%)	1 - Remember : knowledge: recall or retrieve previously learned information. 2 - Understand: comprehension: grasp the meaning of information, interpret, and explain ideas.
(20%)	3 - Application: use knowledge and concepts in new situations or contexts.
(20%)	4 - Analysis: break down information into components, examine relationships, & identify patterns.
(20%)	5 - Evaluation: make judgments based on criteria; assess the value or validity of ideas.
(20%)	6-Synthesis: generate new ideas, products, or interpretations.

#### Main Command Terms used

List, define, identify	recall, memorize.
Summarize, explain, describe.	infer, interpret
Demonstrate, use, illustrate.	apply, solve.
Analyze, compare, contrast.	differentiate, categorize.
Evaluate, assess, justify.	defend, discuss, critique.
Create, design, formulate.	compose, invent.

### 9.2 Educational Goals: aligning Content, Objectives, and Cognitive Levels

Content	Sub-Content Area	Area Learning
Critical Reading	Informational Texts.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Extract and summarize key information from an article.</li> <li>Break down information into components, examine relationships, &amp; identify patterns.</li> <li>Evaluate the credibility of sources in an informational text.</li> </ul>
	Descriptive	Identify the writer's attitude, mood, or tone in the text.
	Expository	Understand the macrostructure of texts and extract relevant information.
	Argumentative or Persuasive.	Use knowledge and concepts in new situations or contexts.
	Business & Technical Reports.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Is familiar with the structure, mechanics and format of a technical report;</li> <li>can detect the tone, purpose &amp; key information in the report.</li> </ul>
mmmentary	Literary Analysis.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Analyze and interpret symbolism in a given passage;</li> <li>identify themes and literary devices in a short story.</li> </ul>
	Commenting on a	<ul style="list-style-type: none"> <li><b>analyze</b> and <b>Interpret</b> specific information, ideas, opinions</li> </ul>

	quote or a picture	<ul style="list-style-type: none"> <li>and attitudes, presented in <b>visual</b> texts;</li> <li>interpret specific information, ideas, opinions and attitudes, presented in written texts;</li> <li>make logical <b>inferences</b> &amp; <b>draw conclusions</b> from <b>visual</b> texts: ability to understand and interpret the meaning of the quote or image considering underlying messages or themes;</li> <li>recognize and comment on the <b>symbolic meaning</b> conveyed by <b>visual elements</b>;</li> <li>make <b>judgments</b> based on <b>criteria</b>; assess the value or <b>validity</b> of ideas. Verifying the <b>accuracy</b> of information;</li> <li>considering <b>Perspectives</b>: demonstrate empathy by considering different interpretations or reactions;</li> <li>using an appropriate and respectful <b>tone</b>;</li> <li><b>tailor comments</b> to the specific <b>audience</b> and <b>platform</b>.</li> </ul>
Translation	Thème/ Version.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Display familiarity with <b>translation tools</b>;</li> <li>display sensitivity and awareness to the <b>lexical</b> and <b>syntactic</b> systems of both <b>English</b> and <b>French</b>;</li> <li>Transfer of <b>cultural</b> or <b>functional</b> content.</li> <li>ability to <b>adapt</b> the writing <b>style</b> to match the <b>tone</b> and <b>style</b> of the original text;</li> <li>ability to solve translation challenges, such as finding <b>equivalent expressions</b>, <b>dealing with ambiguity</b>, &amp; addressing <b>cultural gaps</b>;</li> <li>preserve the author's <b>voice/ intention</b> in the translated text.</li> </ul>
	Thème	<ul style="list-style-type: none"> <li><b>Theme</b>: creatively <b>adapt</b> the <b>content</b> while preserving the essence of the original;</li> <li><b>theme</b>: display a <b>deep understanding</b> of the <b>theme</b> or topic being addressed in the composition.</li> </ul>
Writing Skills	Argumentative Essay	<ul style="list-style-type: none"> <li>construct <b>logical and coherent arguments</b>;</li> <li>provide <b>evidence</b> for claims and <b>rationale</b> for paper;</li> <li>formulate a clear and concise <b>thesis</b> statement that reflects the main argument;</li> <li>address <b>opposing viewpoints</b> to strengthen the overall argument and provide evidence and reasoning to refute counterarguments;</li> <li><b>persuasive</b>: write a persuasive essay with a clear thesis statement and supporting evidence;</li> <li><b>persuasive</b>: utilize persuasive language, rhetoric, and literary devices.</li> </ul>
	Synthesis Essay	<ul style="list-style-type: none"> <li><b>Source Integration</b>: properly cite sources using the appropriate citation style;</li> <li><b>generate</b> new ideas, products, or interpretations based on different sources;</li> <li><b>identifying Patterns</b>: recognize patterns, themes, or commonalities across different sources;</li> <li><b>theme Development</b>: establishing a central theme that connects the various sources;</li> <li>develop a clear <b>thesis</b> that synthesizes information from different sources;</li> <li><b>blending</b> ideas from different sources into a cohesive and</li> </ul>

Text Organisation

Grammar and Editing.

unified piece;

- ensure smooth **transitions** between different sources and ideas;
  - provide **original analysis** and interpretation of the synthesized information;
  - demonstrate a **deep understanding of the topic** beyond a mere summary of sources.
  - demonstrate proper use of **transitions & sentence structure**.
- Identify and correct errors in grammar and punctuation.